Matematika 1., Gyakorlófeladatok, 2018–1019/1. félév

1. gyakorlat, 2018. 09. 12., beküldési határidő: 2018. 09. 27.

1. Abszolútérték

   Milyen $x \in \mathbb{R}$ valós számokra igaz, hogy

   (a) $|x+2| = 3$,
   (b) $|2x+4| = 8$,
   (c) $|3x-1| = 9$,
   (d) $|x-6| = x+1$,
   (e) $\star \left|\dfrac{2x+3}{5x-2}\right| = 3$

   (Szerezhető pontok: $(a)+(b)+(c) \to 1$, $(d) \to 1$, $(e) \to 1$)

2. Százalékszámítás

   (a) (1 pont) Egy autó eredeti ára 9000 euró volt, de csökkentették 7200 euróra. Hány százalékos volt az árcsökkenés?
   (b) (1 pont) A tej tömegének $7,3\%$-a tejszín, a tejszín tömegének 62%-a vaj. Mennyi vaj lesz 5 liter tejből? (1 liter tej kb 1 kg.)
   (c) (1 pont) Évi hány százalékkal kellene az USA-nak csökkentenie károsanyag-kibocsátását, hogy 3 év alatt $27,1\%$-os legyen a csökkenés?

3. Az összegzés szimbóluma: $\sum$

   Írd fel az alábbi összegeket a $\sum$ szimbólum segítségével!

   (a) $3+6+9+12+15+18 =$,
   (b) $5+8+11+14 =$,
   (c) $1+4+9+16+25+36+49 =$,
   (d) $2+5+10+17 =$,
   (e) $3+8+15+24 =$.

   $\star$ Alakítsd át az alábbi összeget úgy, hogy a belső változó (k), ne 1-től, hanem 0-tól induljon!

$$\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{k}{2}+3\right) = \sum_{k=0}^{?} ?$$

   (Szerezhető pontok: $(a)+(b) \to 1$, $(c) \to 1$, $(d)+(e) \to 1$, $\star \to 1$)

4. Polinomok, algebrai törtek, gyöktelenítés

   Alakítsd át az alábbi kifejezéseket algebrai törtté, majd add meg a legbővebb értelmezési tartományát (tehát azokat az x, y-okat vagy k, l-eket, amelyekre az eredeti kifejezés értelmes):

   (a) (1 pont) $\frac{x-y}{xy^2} - \frac{2x+y}{x^2y}$,
   (b) (1 pont) $\frac{k^2-kl}{k^2+kl} \cdot \frac{k^2l+kl^2}{k^2l^2}$,
   (c) (1 pont) $\dfrac{\frac{x+1}{x-2} - \frac{x-1}{x+2}}{\frac{8}{x-2}+4}$.

2. gyakorlat, 2018. 09. 19. (beküldési határidő: 2018.10.04.)

1. Műveletek halmazokkal, halmazok korlátossága, infimum, supremum

   Tekintsük a következő halmazokat:

$$A := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x > 4\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq 6\}, \quad H := \{x \in \mathbb{R} \,:\, 1 \leq x \leq 10\}$$

(a) i. (1 pont) Add meg, hogy a fenti halmazok milyen intervallumokat adnak meg, majd végezd el az alábbi műveleteket: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$ (a H alaphalmazra vonatkozóan)!

ii. (1 pont) Végezd el az alábbi műveleteket: $C \times D$, $A \times B$, ahol $C := A \cap B$, $D := \overline{A}$!

iii. (1 pont) A fenti (A, B, $C := A \cap B$) halmazok közül melyik felülről korlátos, melyik alulról korlátos, melyik korlátos? A felülről korlátosnak add meg a legkisebb felső korlátját, azaz a supremumát, az alulról korlátosnak add meg a legnagyobb alsó korlátját, azaz az infimumát!

(b) Elemezzük az alábbi halmazokat korlátosság szempontjából! (Alulról/felülről/mindenhogyan korlátos-e, adjuk meg a supremumát, infimumát, létezik-e maximuma/minimuma, ha igen, adjuk is meg.)

i. (1 pont) $\{\frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\}$

ii. (1 pont) $\{\frac{3}{3n+2} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\}$

iii. (1 pont) $\{\frac{2}{n^2} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\}$

iv. (1 pont) $\{\frac{1}{n^2+4n+4} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\}$

v. (1 pont) $\{\frac{5}{n^2+2} \ : \ n \in \{n \in \mathbb{N} \ : \ 1 < n < 20\}$

vi. (1 pont) $^\star\{\frac{n^2-6n+5}{(n-3)^2} \ : \ n \in \mathbb{N}^+\}$

(c) (1 pont) Egy sportklubnak atlétika- és fociosztálya van. A klub 30 tagjából 13 tagja az atlétika- és 20 a fociosztálynak. Hányan tagok mindkettőben?

3. gyakorlat, 2018. 09. 26. (beküldési határidő: 2018.10.11.)

Elemi függvények

1. Hatványfüggvények

Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, majd vizsgáljuk meg, hogy hová tartanak, ha x tart $+\infty$-be ill. $-\infty$-be (az utolsó függvénynél csak $+\infty$-be)!

(a) (1 pont) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^6 + 1$,

(b) (1 pont) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^5$,

(c) (1 pont) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)^3$

(d) (1 pont) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x^3}$,

(e) (1 pont) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{10}{21}}$.

2. Exponenciális és logaritmikus függvények

(a) Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, majd vizsgáljuk meg, hogy hová tartanak, ha x tart $+\infty$-be ill. $-\infty$-be (az utolsó függvénynél csak $+\infty$-be)!

i. (1 pont) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x$,

ii. (1 pont) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3^x + 2$,

iii. (1 pont) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x) - 1$.

(b) Egyszerűsítsd az alábbi számokat felhasználva az exponenciális és logaritmikus azonosságokat! (Ne csak a végeredményt írd le, hanem a köztes lépéseket is!)

i. $9^{-\frac{5}{2}}$

ii. $\log_5 125$

iii. $\log_7 \frac{1}{49}$

iv. $\log_9 3^{\frac{2}{3}}$

v. $\log_{31} 1$

vi. $5^{\log_5 20}$

vii. $81^{\log_3 2}$

viii. $6^{\frac{1}{2}\log_6 16}$

ix. $\lg 1000 - \lg 100$ ($\lg := \log_{10}$)

x. $\ln e^5 + \ln e^{-2}$ ($\ln := \log_e$)

(5 db jó megoldásért jár 1 pont)

3. Trigonometrikus függvények

   (a) Ábrázoljuk az alábbi függvényeket, majd adjuk meg a periódusukat!

      i. (1 pont) $f(x) = \sin(3x)$,
      ii. (1 pont) $f(x) = \sin(x + \pi)$,
      iii. (1 pont) $f(x) = \cos(2x)$.

   (b) Bizonyítsd be, hogy az alábbi azonosságok teljesülnek minden $x,\, y \in \mathbb{R}$, ill. minden $a,\, b \in \mathbb{R}$ esetén!

      i. (1 pont) $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$,
      ii. (1 pont) $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$ (segítség: a $3x$-et írjuk fel ügyesen, majd alkalmazzuk a $\cos(x + y)$-ra vonatkozó addíciós képletet),
      iii. (1 pont) $^\star \cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y)\cos(x + y))$ (a cos függvényre felírt addíciós képletet használjuk)
      iv. (1 pont) * $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})$ (segítség: az előző azonosságot használjuk, csak jól kell megválasztani abban az x és y változókat)

4. Hiperbolikus függvények

   Bizonyítsd be, hogy az alábbi azonosságok teljesülnek minden $x,\, y \in \mathbb{R}$ esetén!

   (a) (1 pont) $sh(x + y) = sh(x)ch(y) + sh(y)ch(x)$,
   (b) (1 pont) $ch(2x) = ch^2(x) + sh^2(x)$.

4. gyakorlat, 2018. 10. 03. (beküldési határidő: 2018.10.18.)

1. (1 pont) Függvények: injektivitás, szürjektivitás

   Tekintsük az $f : X \to Y,\, x \mapsto (x - 1)^2 + 3$ függvényt. Add meg X-t és Y-t úgy, hogy a függvény legyen

   (a) szürjektív, de nem injektív,
   (b) injektív, de nem szürjektív,
   (c) injektív és szürjektív.

2. Inverzfüggvény kiszámítása

   (a) Vizsgáld meg, hogy az alábbi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények hol injektívek, majd add meg a függvények inverzét, az inverzfüggvények értelmezési tartományát és értékkészletét is (értelmezési tartománynál nézzétek meg, hogy mik a kikötések az egyes inverz függvényeknél, az értékkészlet pedig az a halmaz lesz, ahol az eredeti függvény injektív)!

      i. (1 pont) $f(x) = 3x + 1$,
      ii. (1 pont) $f(x) = 2x^2 + 4$,
      iii. (1 pont) $f(x) = (x + 3)^2 - 1$,
      iv. (1 pont) $f(x) = x^2 + 8x + 12$,
      v. (1 pont) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{2x - 5}$
      vi. (1 pont) $f(x) = \frac{1}{x+3}$,
      vii. (1 pont) $f(x) = \frac{1}{(x-4)^2}$.
      viii. (1 pont) $f(x) = 2^{x+1}$,
      ix. * (1 pont) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$,

   (b) (1 pont) Mutasd meg, hogy ha egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény szigorú monoton (növekedő vagy csökkenő) egy $I \subset D(f)$ intervallumon, akkor az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény injektív!