Kalkulus I. gyakorlat, megoldásvázlatok
Fizika BSc I/1.

1. gyakorlat

1. Ábrázoljuk a következő halmazokat a síkon!

   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x + y < 1\}$,

   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 4\}$,

   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 < 4, \; x + y < 1\}$,

   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x| + |y| < 1\}$.

2. Ha A, B és C adott halmazok, akkor írjuk fel az alábbi halmazokat A, B, C és az $\cup, \cap, \setminus$ halmazműveletek segítségével:

   (a) $E = \{x : \; x \in A$ és $(x \in B$ vagy $x \in C)\}$;

   (b) $F = \{x : \; (x \in A$ és $x \in B)$ vagy $x \in C)\}$.

   Megoldás. (a) $E = A \cap (B \cup C)$;

   (b) $F = (A \cap B) \cup C$.

3. Igazak-e az alábbi halmazegyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg konkrét halmazokat, amelyekre nem teljesül az egyenlőség.

   (a) $(A \cup B) \setminus A = B$;

   (b) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;

   (c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

   Megoldás. (a) Nem igaz, legyen $A = \{1\}$, $B = \{1, 2\}$. Ekkor $(A \cup B) \setminus A = \{2\} \neq B$.

   (b) Nem igaz, legyen $A = \{1, 2\}$, $B = \{1\}$, $C = \{2\}$. Ekkor $(A \cup B) \setminus C = \{1\}$, de $A \cup (B \setminus C) = \{1, 2\}$.

   (c) Igaz, ugyanis $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) \iff x \in (A \cup B)$ és $x \notin (A \cap B) \iff$ vagy $x \in A$, vagy $x \in B \iff$ vagy $x \in (A \setminus B)$, vagy $x \in (B \setminus A) \iff x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Igazak-e az alábbi állítások?

   (a) $(A \subset B$ és $A \subset C) \iff A \subset B \cup C$;

   (b) $(A \cup C = B \cup C$ és $A \setminus C = B \setminus C) \iff A = B$;

   Megoldás. (a) A balról jobbra való következtetés természetesen igaz, ugyanakkor visszafelé nem, legyen például $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4, 5\}$ és $A = \{2, 3, 4\}$. Ekkor $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \supset A$, de $A \not\subset B$ (és $A \not\subset C$).

   (b) Itt a jobbról balra történő ($\Longleftarrow$) következtetési irány teljesül nyilvánvaló módon, ugyanakkor a másik irány itt sem következik. Legyenek a halmazok olyanok, hogy nemüresek, $A, B \subset C$ és $A \cap B = \emptyset$. Ekkor mindkét feltétel teljesül, de $A \neq B$. Például $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ és $C = \{1, 2\}$.

5. Legyen X egy halmaz, $A, B \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy

   $$\text{(a)} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \text{(b)} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

   Megoldás. $x \in \overline{A \cup B} \iff x \notin A \cup B \iff x \notin A$ és $x \notin B \iff x \in \overline{A}$ és $x \in \overline{B} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. A másik állítás bizonyítása teljesen hasonló.

6. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a következő függvények: $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2$. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket.

   Megoldás. $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f \circ g)(x) = x^2 + 3$. $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = (x + 3)^2$.

7. Írjuk be a hiányzó függvényeket:

   Megoldás.

(a)	$f(x) = x^2$	$g(x) = x + 1$	$(f \circ g)(x) = \mathbf{(x + 1)^2}$
(b)	$f(x) = \mathbf{x - 4}$	$g(x) = x + 4$	$(f \circ g)(x) = x$
(c)	$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) = \mathbf{x^2}$	$(f \circ g)(x) = \lvert x \rvert$

8. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények. Igaz-e, hogy ha mindkettő injektív, akkor $f + g$ is injektív?

   Megoldás. Nem igaz. Legyen $f(x) = x$, $g(x) = -x$. Mindkettő injektív, de $(f+g)(x) = 0$ nem injektív.

9. Mely függvények injektívek? Amennyiben létezik, adjuk meg az inverzét!

   (a) $f : [0,1] \to [0,1], \quad f(x) = \sqrt{1-x^2};$

   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3;$

   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x - \dfrac{1}{x};$

   (d) $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad k(x) = \dfrac{1}{x}.$

   Megoldás. (a) Ha $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-y^2}$, akkor $1 - x^2 = 1 - y^2 \iff x^2 = y^2$, amiből következik, hogy $x = y$ (hiszen csak a $[0,1]$-en vagyunk), tehát f injektív. Mivel az $y = f(x)$ egyenlet minden $y \in R(f)$-re egyértelműen megoldható, így van inverz. Az $y = \sqrt{1-x^2}$ egyenletből $x = \sqrt{1-y^2}$, azaz $f^{-1} : [0,1] \to [0,1]$, $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2}$. (A függvény inverze önmaga.) (b) A függvény injektív ($x^3 = y^3 \iff x = y$). Mivel az $y = f(x)$ egyenlet minden $y \in R(f)$-re egyértelműen megoldható, így van inverz. Az $y = x^3$-ből x és y szerepét felcserélve, majd y-t kifejezve kapjuk, hogy $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$. (c) A függvény injektív, tegyük fel ugyanis, hogy $h(x) = h(y)$, azaz $x - 1/x = y - 1/y \iff \frac{x^2-1}{x} = \frac{y^2-1}{y} \iff (x-y)(xy+1) = 0$. Ez a h értelmezési tartományán csak úgy lehet, hogy $x = y$. Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén az $y = h(x)$ egyenlet egyértelműen megoldható, hiszen $y = x - 1/x \iff x^2 - xy - 1 = 0$. Ebből $x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{y^2+4}}{2}$, vagyis mindig két gyök van és itt pontosan az egyik gyök lesz az értelmezési tartomány eleme. Az inverz itt is az $x = h(y)$ egyenletből számolható, y-t kifejezve: $h^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $h^{-1}(x) = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$.

   (d) A függvény injektív, ugyanis $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$-ból $x = y$ következik. Mivel az $y = f(x)$ egyenlet minden $y \in R(f)$-re egyértelműen megoldható, így van inverz. Az $y = \frac{1}{x}$ egyenletből x-et kifejezve: $x = \frac{1}{y}$, vagyis k inverze önmaga.

10. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény. Határozzuk meg az $f^{-1}([4,9])$, $f^{-1}([-1,0])$, $f^{-1}([-2,-1])$ halmazokat, ha

    (a) $f(x) = x^2;$

    (b) $f(x) = \sin x.$

    Megoldás. (a) $f^{-1}([4,9]) = [-3,-2] \cup [2,3]$, $f^{-1}([-1,0]) = \{0\}$, $f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset$.

    (b) $f^{-1}([4,9]) = \emptyset$, $f^{-1}([-1,0]) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$, $f^{-1}([-2,-1]) = \{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}$.

11. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény, $A, B \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmazok.

    (a) Mutassuk meg, hogy

       i. $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big);$

       ii. $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B.$

    (b) Adjunk példát arra, hogy a fenti tartalmazásoknál általában nincs egyenlőség! (Nézzük meg az előző feladatot.)

    Megoldás. (a) Legyen $x \in A$, ekkor az őskép definíciója szerint $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$, hiszen $f(x) \in f(A)$. Itt általában a két halmaz nem egyenlő, pl. az előző feladatbeli $f(x) = x^2$ függvény és $A = [2,3]$ halmaz esetén $f(A) = [4,9]$, $f^{-1}\big(f(A)\big) = [-3,-2] \cup [2,3] \neq [2,3]$.

    (b) Ha $x \in f\big(f^{-1}(B)\big)$, akkor van olyan $y \in f^{-1}(B)$, hogy $f(y) = x$. Másrészt $y \in f^{-1}(B)$ azt jelenti, hogy $f(y) \in B$, azaz $x \in B$. Általában itt sincs egyenlőség: ha $f(x) = x^2$ és $B = [-1,0]$, akkor $f^{-1}(B) = \{0\}$, $f\big(f^{-1}(B)\big) = f(\{0\}) = \{0\} \neq [-1,0]$.

2. gyakorlat

1. Mivel egyenlők az alábbi számok?

   Megoldás.

$$\log_2 16 = 4, \quad \log_9 3 = \frac{1}{2}, \quad \log_6 6 = 1, \quad \log_6 6^6 = 6, \quad 2^{\log_2 3} = 3, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1, \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\pi = 0, \quad \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\frac{29\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{-2010\pi}{4} = -1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = 1, \quad \operatorname{sgn}\log_{\frac{1}{2}}\frac{3}{2} = -1, \quad \operatorname{sgn}\operatorname{sgn}\cos\sqrt{2010}\pi = -1.$$

2. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket! Melyek lesznek párosak, páratlanok, periodikusak? Mi az értelmezési tartomány?

$$x \mapsto 2x-5, \quad x \mapsto 6-x, \quad x \mapsto x^2-3, \quad x \mapsto (x-3)^2, \quad x \mapsto 6x-x^2, \quad x \mapsto \operatorname{sgn}(6x-x^2),$$

$$x \mapsto \frac{1}{x+3}, \quad x \mapsto \frac{-2x-11}{x+3}, \quad x \mapsto 2^x, \quad x \mapsto 2^{1-x}, \quad x \mapsto \log_3|x|, \quad x \mapsto 5\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1,$$

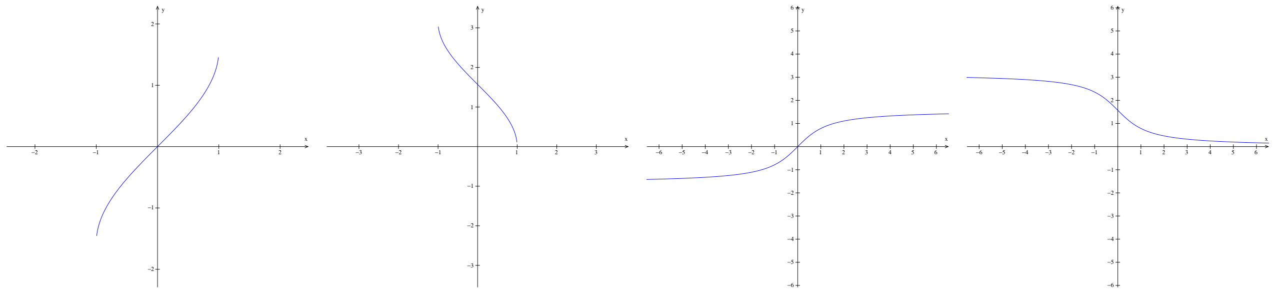
$$x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \cos 2x, \quad x \mapsto 2\cos\frac{x}{2}-2, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \big|\cos|x|\big|.$$

3. Ábrázoljuk a trigonometrikus függvények inverzeit! Mi az értelmezési tartomány és az értékkészlet?

$$\operatorname{arc\,sin} x = \left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1}(x), \quad \operatorname{arc\,cos} x = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1}(x),$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \left(\operatorname{tg}|_{\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}\right)^{-1}(x), \quad \operatorname{arc\,ctg} x = \left(\operatorname{ctg}|_{(0,\pi)}\right)^{-1}(x).$$

Megoldás.



(a) $x \mapsto \operatorname{arc\,sin} x$ (b) $x \mapsto \operatorname{arc\,cos} x$ (c) $x \mapsto \operatorname{arc\,tg} x$ (d) $x \mapsto \operatorname{arc\,ctg} x$

3. gyakorlat

1. Mi a határértéke az alábbi (a_n) sorozatoknak? Definíció alapján adott $\varepsilon > 0$-hoz adjunk meg $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindexet is.

$$\text{(a)} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \text{(b)} \quad a_n = \frac{6n+7}{11n-5}.$$

Megoldás. (a) A sorozat határértéke 0. Legyen ugyanis $\varepsilon > 0$ adott, ekkor

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \sqrt{n} > 1/\varepsilon \iff n > 1/\varepsilon^2.$$

Tehát az $n_0 := \left[1/\varepsilon^2\right] + 1$ küszöbindex-választás jó lesz.

(b) Ennek a sorozatnak a határértéke $6/11$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott, ekkor

$$\left|\frac{6n+7}{11n-5} - \frac{6}{11}\right| = \left|\frac{11\cdot(6n+7) - 6\cdot(11n-5)}{121n-55}\right| = \frac{107}{121n-55} < \varepsilon \iff n > \frac{55}{121} + \frac{107}{121\cdot\varepsilon},$$

azaz $|a_n - 6/11| < \varepsilon$ teljesül, ha n nagyobb, mint a jobb oldalon álló (ε-tól függő) szám.

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét a határérték és a műveletek közötti szabályok segítségével!

$$\text{(a)} \quad 1 + \frac{1}{n}, \qquad \text{(b)} \quad \frac{2}{n}, \qquad \text{(c)} \quad \frac{3}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right), \qquad \text{(d)} \quad \frac{\sqrt[n]{2}}{n^2+1}.$$

Megoldás. (a) A sorozat a $b_n = 1$ és $c_n = \frac{1}{n}$ sorozatok összege, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek összege: $\lim a_n = 1 + 0 = 1$.

(b) A sorozat a $b_n = \frac{1}{n}$ sorozat kétszerese, így a határértéke a (b_n) sorozat határértékének kétszerese: $\lim a_n = 2 \cdot 0 = 0$.

(c) A sorozat a $b_n = \frac{3}{n}$ és $c_n = 1 + \frac{1}{n}$ sorozatok szorzata, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek szorzata: $\lim a_n = 0 \cdot 1 = 0$.

(d) A sorozat a $b_n = \sqrt[n]{2}$ és $c_n = n^2 + 1$ sorozatok hányadosa, így a határértéke ezen sorozatok határértékeinek hányadosa: $\lim a_n = \frac{1}{+\infty} = 0$.

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$\text{(a)}\ \frac{n+2}{3n-4} \qquad \text{(b)}\ \frac{2n^2-3n-5}{6-n^2} \qquad \text{(c)}\ \frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{3n+5}$$

$$\text{(d)}\ \frac{3^n-5\cdot 2^n}{2\cdot 3^n+1,8^{n+5}} \qquad \text{(e)}\ \frac{3^{2n}-4\cdot 2^{n+3}}{5^n-2\cdot 9^{n+1}+n^6} \qquad \text{(f)}\ \frac{2n!+3^n}{5n^2-1+n!}$$

Megoldás.

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{3-\frac{4}{n}}=\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n-5}{6-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{n}-\frac{5}{n^2}}{\frac{6}{n^2}-1}=-2.$$

(c)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3}+2n}{3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+2}{3+\frac{5}{n}}=\frac{3}{3}=1.$$

(d)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-5\cdot 2^n}{2\cdot 3^n+1,8^{n+5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2+1,8^5\cdot 0,6^n}=\frac{1}{2}.$$

(e)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{2n}-4\cdot 2^{n+3}}{5^n-2\cdot 9^{n+1}+n^6}=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-32\cdot 2^n}{5^n-18\cdot 9^n+n^6}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-32\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^n}{\left(\frac{5}{9}\right)^n-18+\frac{n^6}{9^n}}=-\frac{1}{18}.$$

(f)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n!+3^n}{5n^2-1+n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3^n}{n!}}{5\frac{n^2}{n!}-\frac{1}{n!}+1}=\frac{2}{1}=2.$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$\text{(a)}\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \qquad \text{(b)}\ \sqrt{n^2+6n+1}-n.$$

Megoldás. A „$\infty-\infty$”-típusú kifejezést az alábbi módon alakíthatjuk át:

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+6n+1}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{\sqrt{n^2+6n+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{6}{2}=3.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Igaz-e a megfordítás?

Megoldás. Ha (a_n) konvergens, akkor létezik olyan $a\in\mathbb{R}$, hogy minden $\varepsilon>0$-hoz létezik $n_0\in\mathbb{N}$, hogy minden $n\geq n_0$-ra $|a_n-a|<\varepsilon$. Rögzítsünk egy tetszőleges $\varepsilon>0$-t, például legyen $\varepsilon=1$. Ekkor választható hozzá egy olyan n_0 küszöbszám, hogy a sorozatnak a nála nagyobb indexű elemei az $(a-1,a+1)$ intervallumban vannak, azaz ezen az intervallumon kívül legfeljebb véges sok tagja lehet a sorozatnak (az $a_1,a_2,\ldots,a_{n_0-1}$ lehet kívül). Ha M-mel jelöljük az első n_0-1 tag maximumát, m-mel a minimumát, akkor a sorozatnak felső korlátja lesz a $\max\{a+1,M\}$ szám, alsó korlátja pedig a $\min\{a-1,m\}$.

A megfordítás nem igaz, az $a_n=(-1)^n$ sorozat korlátos, de nincs határértéke.

4. gyakorlat

A határértékek kiszámításakor jó ötletnek tűnhet, hogy egyszerűen „megpróbálunk behelyettesíteni”, de ez általában nem hoz sikert, pl. mert 0/0 típusú erdeményt kapunk. Ilyenkor egy ügyes átalakítás segíthet (algebrai, vagy trigonometrikus azonosságok).

1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=? \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=? \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} &= \frac{-1}{-1}=1;\\
\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x+1/2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{2(x+1/2)}=\frac{2}{3};\\
\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} &= \lim_{x\to +\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10}=? \qquad \lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10}=? \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10}=?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} &= \frac{-6}{9}=-\frac{2}{3};\\
\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} &= \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-3)}{(x+2)(-2x+5)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-3}{5-2x}=-\frac{5}{9};\\
\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-x-6}{x-2x^2+10} &= \lim_{x\to -\infty}\frac{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x}-2+\frac{10}{x^2}}=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=? \qquad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=? \qquad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}=?$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}\cdot\frac{\sqrt{4+x}+2}{\sqrt{4+x}+2}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4};$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)}{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{1+2x}+3)}=\\
&= \lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}\cdot\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}=\\
&= \lim_{x\to 3}\frac{-3(x-3)}{(x^2-9)\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=\lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)\cdot(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=-\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=? \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1}=?$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+\ldots+x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^{n-1}+\ldots+x+1\right)=n;\\
\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x^m-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x^m-1}=n\cdot\frac{1}{m}=\frac{n}{m}.
\end{aligned}$$

5.
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=? \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=? \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=?$$

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{5x}{\sin 5x}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{5}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{1-\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)\cos x}=\frac{1}{2}.$$

6. Mi legyen A értéke, hogy f folytonos legyen az $x=2$ pontban is?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-2}{x^3-8}, & \text{ha} \quad x\neq 2\\ A, & \text{ha} \quad x=2.\end{cases}$$

Megoldás. A megadott függvény (amely az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett) akkor lesz folytonos $x=2$-ben, ha az ottani határértéke megegyezik a helyettesítési értékkel. Mivel

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-8}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+2x+4}=\frac{1}{12},$$

ezért f folytonos lesz $x=2$-ben, ha $A=1/12$.

5. gyakorlat

1. Mutassuk meg a definíció alapján, hogy a következő függvények minden $a\in\mathbb{R}$ pontban differenciálhatók és számítsuk is ki a deriváltakat:

$$(a)\quad f(x)=x^n,\ n\geq 1 \text{ egész}, \qquad (b)\quad h(x)=\sin x$$

Megoldás.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+a^{n-1})}{x-a}=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+\ldots+a^{n-1})=n\cdot a^{n-1};$$

$$h'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\cdot\cos\frac{x+a}{2}\cdot\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\cos\frac{x+a}{2}=1\cdot\cos a=\cos a.$$

2. Deriváljuk az alábbi függvényeket, felhasználva a deriválási szabályokat.

Megoldás.

$$(a)\quad \left(2+x-x^2\right)'=1-2x,$$

$$(b)\quad \left(a^5+5a^3x^2-x^5\right)'=10a^3x-5x^4,$$

$$(c)\quad ((x-a)(x-b))'=1\cdot(x-b)+(x-a)\cdot 1=2x-a-b,$$

$$(d)\quad \left(\frac{2x}{1-x^2}\right)'=\frac{2(1-x^2)+4x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2},$$

$$(e)\quad \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$(f)\quad \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right),$$

$$(g)\quad \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right)'=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right),$$

$$(h)\quad \left(x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)'=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}},$$

$$\begin{aligned}(i)\quad \left((1-x)\left(1-x^2\right)^2\left(1-x^3\right)^3\right)'=&-\left(1-x^2\right)^2\left(1-x^3\right)^3-4x(1-x^2)(1-x)\left(1-x^3\right)^3-\\&-9x^2(1-x)\left(1-x^2\right)^2\left(1-x^3\right)^2,\end{aligned}$$

$$(j)\quad (\cos 2x-2\sin x)'=-(\sin 2x)\cdot 2-2\cdot\cos x,$$

$$(k)\quad ((x\sin\alpha+\cos\alpha)(x\cos\alpha-\sin\alpha))'=\sin\alpha(x\cos\alpha-\sin\alpha)+\cos\alpha(x\sin\alpha+\cos\alpha)=x\sin 2\alpha+\cos 2\alpha,$$

$$(l)\quad \left(\frac{\sin^2 x}{\sin x^2}\right)'=\frac{2\sin x\cos x\sin x^2-2x\sin^2 x\cos x^2}{\sin^2 x^2}$$

$$(m)\quad \left(e^{-x^2}\right)'=\left(e^{-x^2}\right)\cdot(-2x),$$

$$(n)\quad (\ln\ln\ln x)'=\frac{1}{\ln\ln x}\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x},$$

$$(o)\quad \left(\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{\sin x}.$$

3. Legyen $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Mi lesz $f'(0)$?

   Megoldás. Mivel külön-külön mindegyik tényező deriválja 1, a szorzatfüggvényre vonatkozó deriválási szabály szerint a derivált egy öttagú összeg lesz, minden tagból pontosan az egyik tényező „hiányzik” (amikor őt deriváljuk, a többihez pedig nem nyúlunk). Az öt tag mindegyikében fog szerepelni az x-es szorzó, kivéve egyet. Emiatt $f'(0)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)\big|_{x=0}=24$.

4. Az inverzfüggvény deriválási szabályát használva számítsuk ki az alábbi függvények deriváltját (ahol értelmes):

$$\text{(a)}\quad f(x)=\sqrt[n]{x},\qquad \text{(b)}\quad g(x)=\operatorname{arc\,tg} x.$$

   Megoldás. Mivel az x^n, illetve a $\operatorname{tg} x$ függvények deriváltját már tudjuk, az inverzfüggvény deriválási szabálya szerint

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)'\Big|_{x=b}=\frac{1}{n\cdot\left(\sqrt[n]{b}\right)^{n-1}}=\frac{1}{n}\cdot b^{\frac{1-n}{n}}=\frac{1}{n}\cdot b^{\frac{1}{n}-1}.$$

$$(\operatorname{arc\,tg} x)'\Big|_{x=b}=\frac{1}{\operatorname{tg}'(a)}\Bigg|_{a=\operatorname{arc\,tg} b}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 a}}\Bigg|_{a=\operatorname{arc\,tg} b}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(a)}\Bigg|_{a=\operatorname{arc\,tg} b}=\frac{1}{1+b^2}.$$

5. Mennyi az $f(x)=\sin x+x$ függvény inverzének deriváltja a $b=1+\frac{\pi}{2}$ pontban?

   Megoldás. Ha f invertálható, differenciálható az a pontban és $f'(a)\neq 0$, akkor f^{-1} differenciálható a $b=f(a)$ pontban és $(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$. Ezt alkalmazva

$$\left(f^{-1}\right)'\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{f'(\pi/2)}=\frac{1}{1+\cos x}\Bigg|_{x=\pi/2}=1.$$

6. gyakorlat

1. Végezzünk teljes függvényvizsgálatot!

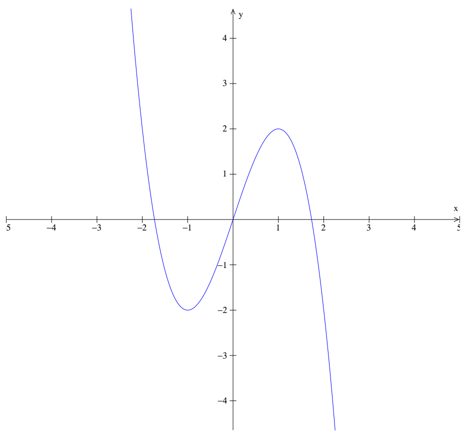
(a) $f(x) = 3x - x^3$, (b) $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, (c) $h(x) = x + \dfrac{1}{x}$, (d) $k(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Megoldás.

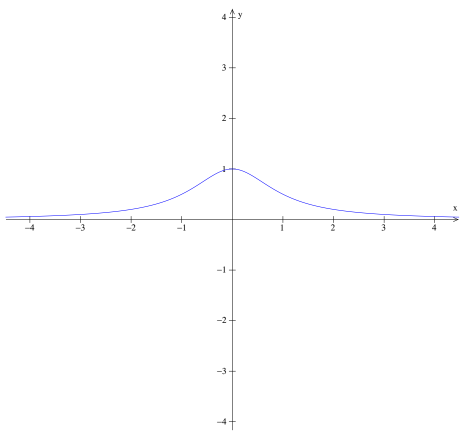
(a) A függvény egész $\mathbb{R}$-en értelmezett, zérushelye van a $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$ pontokban, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. $f'(x) = 3 - 3x^2$, $f''(x) = -6x$, $f'''(x) = -6$. A derivált zérushelyei (lehetséges lokális szélsőértékhelyek): $-1, 1$, a második derivált zérushelyei (lehetséges inflexiós pontok): 0. Mivel f polinom, ezért mindenhol folytonos. Az alábbi táblázat segít eldönteni f alaki tulajdonságait:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	↘ konvex	lokális minimum	↗ konvex	inflexiós pont	↗ konkáv	lokális maximum	↘ konkáv

A derivált mindkét zérushelyén lokális szélsőérték van, mert ott a második derivált nem nulla. Az $x = 0$-ban inflexiós pont van, mert a harmadik derivált ott nem nulla (illetve a 0-ban a függvény konvexből konkávba vált át). A rajzhoz még számoljuk ki a függvényértékeket az $x = \pm 1$-ben, azaz a lokális minimum és maximum értékeit: $f(-1) = -2$, $f(1) = 2$. A függvény értékkészlete az egész $\mathbb{R}$.



(e) $f(x) = 3x - x^3$



(f) $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(b) A g függvény mindenhol értelmezett, nincs zérushelye, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Rövid számolással adódik, hogy $g'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $g''(x) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$. Ennek megfelelően a derivált zérushelye az $x = 0$, a második derivált zérushelyei az $x = -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}$ pontok.

x	$(-\infty,-1/\sqrt{3})$	$-1/\sqrt{3}$	$(-1/\sqrt{3},0)$	0	$(0,1/\sqrt{3})$	$1/\sqrt{3}$	$(1/\sqrt{3},\infty)$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗ konvex	inflexiós pont	↗ konkáv	lokális maximum	↘ konkáv	inflexiós pont	↘ konvex

Valóban inflexiós pontokról van szó, mert a függvény konvexből konkávba vált azokban a pontokban. A függvény értékei az inflexiós pontokban, illetve a lokális szélsőértékhelyen: $f(0) = 1$, $f(\pm 1/\sqrt{3}) = 3/4$. A függvény egy racionális törtfüggvény, amely mindenhol értelmezett, így mindenhol folytonos. Mivel zérushely nincs, a végtelenbeli limeszekből és a szélsőértékhelyen felvett értékből a folytonsság miatt következik, hogy g értékkészlete a $(0, 1]$ intervallum.

(c) A h függvény mindenhol értelmezett, kivéve az $x = 0$ pontot. Ettől a ponttól eltekintve mindenhol máshol folytonos. Zérushelye nincs. $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} h(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 0+} h(x) = \infty$. Az első és második deriváltak: $h'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $h''(x) = \frac{2}{x^3}$. A derivált zérushelyei: -1 és 1, a második deriváltnak nincs zérushelye.

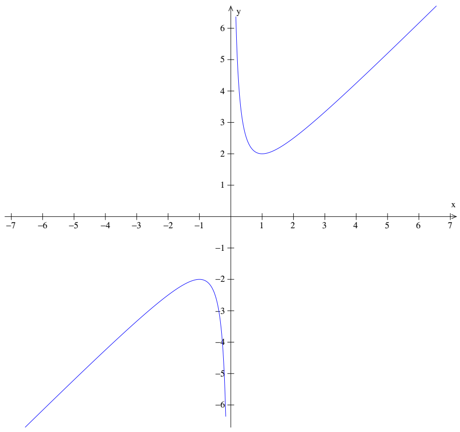
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ konkáv	lokális maximum	$\searrow$ konkáv	nincs értelmezve	$\searrow$ konvex	lokális minimum	$\nearrow$ konvex

$h(-1) = -2$, $h(1) = 2$. A végtelenbeli és a szakadási pontbeli határértékeket figyelembevéve, a függvény értékkészlete a $(-\infty,-2] \cup [2,\infty)$ halmaz.

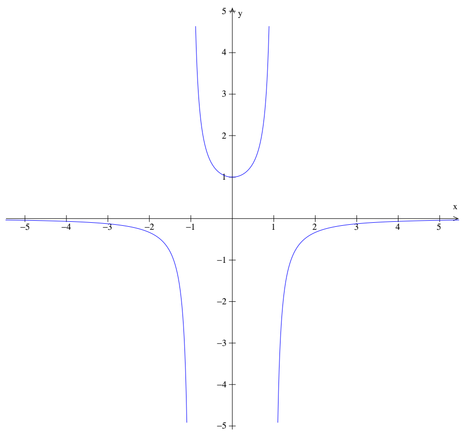
(d) A k függvény értelmezési tartománya a $D(k) = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$ halmaz, továbbá $D(k)$ minden pontjában folytonos. A limeszek $\pm\infty$-ben és ± 1-ben: $\lim_{x\to\pm\infty} k(x) = 0$, $\lim_{x\to 1+} k(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1-} k(x) = \infty$, $\lim_{x\to -1+} k(x) = \infty$, $\lim_{x\to -1-} k(x) = -\infty$. Zérushely nincs, $k(0) = 1$. A deriváltak: $k'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$, $k''(x) = \frac{6x^2+2}{(1-x^2)^3}$. A derivált egyetlen zérushelye $x = 0$, a második deriváltnak nincs zérushelye $D(k)$-ban.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f''(x)$	$-$		$+$	$+$	$+$		$-$
$f(x)$	$\searrow$ konkáv	nincs értelmezve	$\searrow$ konvex	lokális minimum	$\nearrow$ konvex	nincs értelmezve	$\nearrow$ konkáv

A 0-ban lokális minimum van, mert a második derivált pozitív, a minimum értéke $k(0) = 1$, ez viszont nem globális minimum, hiszen a szakadási pontokban van $-\infty$ határérték is. Az értékkészlet az $R(k) = (-\infty,0) \cup [1,\infty)$ halmaz.



(g) $h(x) = x + 1/x$



(h) $k(x) = \frac{1}{1-x^2}$

2. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális és globális szélsőértékhelyeit!

$$\text{(a)} \quad f(x) = 2x - x^4, \qquad \text{(b)} \quad g(x) = e^x \sin x.$$

Megoldás. (a) $f'(x) = 2 - 4x^3$, ennek a zérushelye $x_0 = 1/\sqrt[3]{2}$. Tehát ebben a pontban *lehet* lokális szélsőértékhely. Mivel $f''(x_0) < 0$, ezért x_0-ban lokális maximum van, a maximum értéke $f(x_0) \approx 1,19$. Ez egyben globális maximum is, mert a függvény limesze a $\pm\infty$-ben $-\infty$.

(b) $f'(x) = e^x(\sin x + \cos x)$, $f''(x) = 2e^x \cos x$. Ott lehet lokális szélsőértékhely, ahol $f'(x) = 0$, azaz az $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$ pontokban ($k \in \mathbb{Z}$). A második derivált előjele ezekben a pontokban páros k-ra negatív, páratlan k-ra pozitív. Ebből következően f-nek lokális maximuma van az $x = \frac{3\pi}{4} + 2l\pi$ helyeken és lokális minimuma van az $x = \frac{3\pi}{4} + (2l+1)\pi$ pontokban ($l \in \mathbb{Z}$). A függvénynek azonban nincs globális maximuma, illetve minimuma, mert f értékei a lokális maximumhelyeken végtelenhez tartanak, a minimumhelyeken felvett értékei pedig $-\infty$-hez. Például a maximumhelyeken

$$f(x_{\max}^{(l)}) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2l\pi} \to \infty, \text{ ha } l \to \infty.$$

3. (a) Egy $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvényre $f'(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban lokális szélsőértéke van?
   (b) Egy $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ függvényre $f''(0) = 0$. Igaz-e, hogy a 0-ban inflexiós pontja van?

Megoldás. Egyik sem igaz. Az első esetben az $f(x) = x^3$ függvény szigorúan monoton növő, így nyilván nincs lokális szélsőértéke az $x = 0$-ban, bár ott a deriváltja 0. A (b) részhez az $f(x) = x^4$ függvényre $f''(0) = 0$, de sehol sincs inflexiós pontja, hiszen végig konvex.

4. Írjuk fel az $f(x) = \cos x + \dfrac{2}{x^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban.

Megoldás. Az érintő egyenlete az x_0 pontban: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Mivel $f'(x) = -\sin x - \dfrac{4}{x^3}$ és $f(2) = \cos 2 + 1/2$, ezért a keresett érintő egyenlete

$$y = -\left(\sin 2 + \frac{1}{2}\right)(x-2) + \cos 2 + \frac{1}{2}.$$

5. Írjuk fel a $k(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$ függvény érintőjének egyenletét az $x_0 = 2$ pontban. Húzzuk be ezt az egyenest az 1. (d) feladat ábrájába!

Megoldás. Az érintő egyenlete az x_0 pontban: $y = k'(x_0)(x - x_0) + k(x_0)$. Mivel $k'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$ és $k(2) = -1/3$, ezért a keresett érintő egyenlete $y = \dfrac{4}{9}x - \dfrac{11}{9}$.

6. Számítsuk ki az alábbi függvények deriváltjait.

Megoldás.

$$\begin{aligned}
(x^x)' &= \left(e^{x\cdot\ln x}\right)' = e^{x\cdot\ln x}\cdot\left(\ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x\cdot(\ln x + 1),\\
(\ln\sin x)' &= \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x,\\
(\log_x e)' &= \left(\frac{\ln e}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x},\\
\left(\ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)\right)' &= \frac{1}{\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)}\cdot\left(e^x + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot e^{2x}\cdot 2\right),\\
\left(\operatorname{arc\,tg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)' &= \frac{1}{1+\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{\dfrac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{2\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

7. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \le 1\\ ax+b, & \text{ha } x > 1\end{cases}$$

Hogyan kell megválasztani a és b értékét, ha azt akarjuk, hogy f differenciálható legyen $x_0 = 1$-ben is?

Megoldás. A függvény két részből van összerakva, egy paraboladarabból és egy félegyenesből áll. Azt szeretnénk, hogy a függvénygrafikon két része „csatlakozzon" (azaz f legyen folytonos) és a két darab illeszkedése legyen „sima", ne törjön meg (azaz legyen f differenciálható). A folytonossághoz az kell, hogy a jobb és bal oldali határértékek megegyezzenek, azaz

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to 1-} x^2 = 1 = a + b = \lim_{x\to 1+}(ax+b) = \lim_{x\to x_0+} f(x),$$

azaz $1 = a + b$-nek teljesülnie kell, hogy f egyáltalán folytonos legyen. A másik követelmény a jobb és bal oldali deriváltak egyezése, azaz

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1-}\frac{x^2-1}{x-1} = 2 = a = \lim_{x\to 1+}\frac{ax+b-(a+b)}{x-1} = f'_+(1),$$

azaz $a = 2$ és $b = 1 - a = 1 - 2 = -1$.

7. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi határértékeket L'Hospital-szabállyal.

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=? \qquad \text{(b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}=? \qquad \text{(c)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=?$$

$$\text{(d)}\quad \lim_{x\to 0+} x\ln x=? \qquad \text{(e)}\quad \lim_{x\to 0+} x^x=? \qquad \text{(f)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=?$$

Megoldás.

$$(a)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx}=\frac{a}{b};$$

$$(b)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x+\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x+\cos x}{2}=1;$$

$$(c)\quad \lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6};$$

$$(d)\quad \lim_{x\to 0+} x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0;$$

$$(e)\quad \lim_{x\to 0+} x^x=\lim_{x\to 0} e^{x\ln x}=e^0=1;$$

$$(f)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos ax}(-\sin ax)a}{\frac{b}{\cos bx}(-\sin bx)b}=\lim_{x\to 0}\frac{a\operatorname{tg} ax}{b\operatorname{tg} bx}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\frac{1}{\cos^2 ax}}{b^2\frac{1}{\cos^2 bx}}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2\cos^2 bx}{b^2\cos^2 ax}=\frac{a^2}{b^2}.$$

2. Írjuk fel az alábbi függvények n-edfokú x_0-körüli $T_{n,x_0}(x)$ Taylor-polinomját.

   (a) $f(x)=e^x$, $T_{6,0}(x)=?$

   (b) $g(x)=\sqrt{1+x}$, $T_{2,0}(x)=?$

   (c) $h(x)=x^x$, $T_{2,1}(x)=?$

Megoldás.

$$(a)\quad T_{f,\,6,\,0}(x)=\sum_{n=0}^{6}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{6}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!};$$

$$(b)\quad T_{g,\,2,\,0}(x)=\sum_{n=0}^{2}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8};$$

$$(c)\quad T_{h,\,2,\,1}(x)=\sum_{n=0}^{2}\frac{h^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n=1+\frac{1}{1!}\cdot(x-1)+\frac{2}{2!}\cdot(x-1)^2.$$

3. Becsüljük meg, hogy legfeljebb mekkora hibát követünk el az alábbi közelítő formulával:

$$\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}\qquad \left(x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right).$$

Megoldás. Használjuk a Taylor-formula Lagrange-maradéktagos alakját. Eszerint ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható az a pont egy környezetében, akkor

$$f(x)=T_{f,\,n,\,a}(x)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

ahol ξ egy a és x közötti érték. Az $f=\sin$ függvény akárhányszor differenciálható és a megadott közelítő formula éppen $T_{f,\,3,\,0}(x)$, sőt, mivel a függvény negyedik deriváltja a 0-ban $\sin 0=0$, ezért valójában $x-\frac{x^3}{6}=T_{f,\,4,\,0}(x)$ is igaz. Mivel $|x|\le 1/2$, ezért

$$\left|\sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)\right|=|f(x)-T_{f,\,4,\,0}(x)|=\left|\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^5\right|\le\frac{1}{5!}\left|x^5\right|\le\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{3840}.$$

4. Számoljuk ki e értékét legalább 4 tizedesjegy pontossággal csak a négy alapművelet felhasználásával!

Megoldás. Az e^x már kiszámolt Taylor-polinomját használva

$$|e^x-T_{n,\,0}(x)|=\left|\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le\frac{3}{(n+1)!}<10^{-4}\Leftrightarrow(n+1)!>3\cdot 10^4\Leftrightarrow n+1\ge 8\Leftrightarrow n\ge 7.$$

Tehát e egy jó közelítő értéke:

$$\hat{e} = T_{n,\,0}(1) = \sum_{k=0}^{7} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = 2,718253968,$$

ami a pontosabb $e = 2,718281828$ értékkel összehasonlítva az első 4 tizedesjegyben valóban megegyezik.

8. gyakorlat

1. Az alapintegrálok felhasználásával számoljuk ki a primitív függvényeket.

Megoldás.

$$(a)\quad \int \sqrt[3]{x^2}\ \mathrm{d}x = \int x^{2/3}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C;$$

$$(b)\quad \int \frac{\sqrt[4]{x\sqrt[5]{x}}}{\sqrt[6]{x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{x^{3/10}}{x^{1/6}}\ \mathrm{d}x = \int x^{2/15}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{17/15}}{17/15} + C = \frac{15}{17}\sqrt[15]{x^{17}} + C;$$

$$(c)\quad \int (6\sin x + 5\cos x)\ \mathrm{d}x = 6\int \sin x\ \mathrm{d}x + 5\int \cos x\ \mathrm{d}x = -6\cos x + 5\sin x + C;$$

$$(d)\quad \int \mathrm{tg}^2\, x\ \mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x - \int 1\ \mathrm{d}x = \mathrm{tg}\, x - x + C;$$

$$(e)\quad \int \frac{5\cos 2x}{\sin x + \cos x}\ \mathrm{d}x = 5\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x}\ \mathrm{d}x = 5\int (\cos x - \sin x)\ \mathrm{d}x = 5(\sin x + \cos x) + C;$$

$$(f)\quad \int \frac{-5}{2+2x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\,\mathrm{arc\,tg}\, x + C$$

2. Az $\int f(ax+b)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$ formulát használva számítsuk ki a primitív függvényeket.

Megoldás.

$$(a)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \ln|x+a| + C;$$

$$(b)\quad \int (2x-3)^{10}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\frac{(2x-3)^{11}}{11} + C = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + C;$$

$$(c)\quad \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\ \mathrm{d}x = \int (1-x)^{-3/5}\ \mathrm{d}x = -\frac{(1-x)^{2/5}}{2/5} + C = -\frac{5}{2}(1-x)^{2/5} + C$$

3. Számoljuk ki az alábbi $f^n(x)f'(x)$ és $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú integrandusok primitív függvényét.

Megoldás.

$$(a)\quad \int x^2(2x^3+4)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int 6x^2(2x^3+4)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\frac{(2x^3+4)^2}{2} + C = \frac{(2x^3+4)^2}{12} + C;$$

$$(b)\quad \int \sin x\cos x\ \mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$

$$(c)\quad \int \sin^4 x \sin 2x\ \mathrm{d}x = 2\int \sin^5 x\cos x\ \mathrm{d}x = 2\frac{\sin^6 x}{6} + C = \frac{\sin^6 x}{3} + C;$$

$$(d)\quad \int \frac{4\sin x}{5\cos x + 4}\ \mathrm{d}x = -\frac{4}{5}\int \frac{-5\sin x}{5\cos x + 4}\ \mathrm{d}x = -\frac{4}{5}\ln|5\cos x + 4| + C;$$

$$(e)\quad \int \frac{1}{x\ln x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1/x}{\ln x}\ \mathrm{d}x = \ln|\ln x| + C.$$

4. Primitív függvény kiszámítása parciális integrálással.

Megoldás.

$$(a) \quad \int xe^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,\mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x} + C;$$

$$(b) \quad \int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C;$$

$$(c) \quad \int \ln x\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C;$$

$$\begin{aligned}(d) \quad \int \operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x &= \int 1\cdot\operatorname{arc\,tg} x\,\mathrm{d}x = \\ &= x\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2} = x\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(e) \quad \int e^{2x}\operatorname{sh}(4x)\,\mathrm{d}x &= \frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sh}(4x) - 2\int e^{2x}\operatorname{ch}(4x)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{2x}}{2}\operatorname{sh}(4x) - 2\left(\frac{e^{2x}}{2}\operatorname{ch}(4x) - 2\int e^{2x}\operatorname{sh}(4x)\,\mathrm{d}x\right) = \\ &= e^{2x}\left(\frac{\operatorname{sh}(4x)}{2} - \operatorname{ch}(4x)\right) + 4\int e^{2x}\operatorname{sh}(4x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

A kapott egyenletet átrendezve kapjuk, hogy

$$\int e^{2x}\operatorname{sh}(4x)\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{2x}}{3}\left(\frac{\operatorname{sh}(4x)}{2} - \operatorname{ch}(4x)\right) + C.$$

9. gyakorlat

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat alkalmas helyettesítéssel, vagy akár más módon is.

Megoldás.

(a) A $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t$, így

$$\int e^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int e^t \cdot 2t\ \mathrm{d}t = 2\left(te^t - \int e^t\ \mathrm{d}t\right) = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C;$$

(b) A $t = (2/3)x$ helyettesítéssel $x = (3/2)t \Rightarrow \mathrm{d}x = 3/2\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{1}{\sqrt{36-16x^2}}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}x\right)^2}} = \frac{1}{6}\int \frac{3/2}{\sqrt{1-t^2}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\arcsin t + C = \frac{1}{4}\arcsin\left(\frac{2}{3}x\right) + C;$$

(c) A $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = t^2 \Rightarrow \mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{2t}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int 2 - \frac{2}{1+t}\ \mathrm{d}t = 2t - 2\ln|1+t| + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1+\sqrt{x}) + C;$$

(d) A $t = x/5$ helyettesítéssel $x = 5t \Rightarrow \mathrm{d}x = 5\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{1}{25+x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{25}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{25}\int \frac{5}{1+t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg} t + C = \frac{1}{5}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{5}\right) + C;$$

(e) A $t = e^x$ helyettesítéssel $x = \ln t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\ \mathrm{d}t = \int 1 - \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C;$$

(f) A $t = \arcsin x$ helyettesítéssel $x = \sin t \Rightarrow \mathrm{d}x = \cos t\ \mathrm{d}t$, így

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ \mathrm{d}t = \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2t\ \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C = \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C;$$

(g) A $t = \sqrt[3]{1+x^3}$ helyettesítéssel $x = \sqrt[3]{t^3-1} \Rightarrow \mathrm{d}x = (t^3-1)^{-2/3}\cdot t^2\ \mathrm{d}t$, így

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\ \mathrm{d}x = \int (t^3-1)^{2/3} t \cdot t^2 (t^3-1)^{-2/3}\ \mathrm{d}t = \int t^3\ \mathrm{d}t = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4}\left(1+x^3\right)^{4/3} + C;$$

(h) A $t = x-1$ helyettesítéssel $x = t+1 \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\ \mathrm{d}x = \int \frac{(t+1)^3}{t^{100}}\ \mathrm{d}t = \int \frac{t^3+3t^2+3t+1}{t^{100}}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{97}} + 3\int \frac{\mathrm{d}t}{t^{98}} + 3\int \frac{dt}{t^{99}} + \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{100}} =$$
$$= -\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{t^{96}} - \frac{3}{97}\cdot\frac{1}{t^{97}} - \frac{3}{98}\cdot\frac{1}{t^{98}} - \frac{1}{99}\cdot\frac{1}{t^{99}} + C =$$
$$= -\left(\frac{1}{96}\cdot\frac{1}{(x-1)^{96}} + \frac{3}{97}\cdot\frac{1}{(x-1)^{97}} + \frac{3}{98}\cdot\frac{1}{(x-1)^{98}} + \frac{1}{99}\cdot\frac{1}{(x-1)^{99}}\right) + C;$$

(i) A $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ és az $\operatorname{sh} x = 2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ azonosságokból kapjuk, hogy $\operatorname{sh} x = \dfrac{2\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\operatorname{th}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$. A $t = \operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel $x = 2\operatorname{ar\,th} t \Rightarrow \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1-t^2}\ \mathrm{d}t$, $\operatorname{sh} x = \dfrac{2t}{1-t^2}$, így

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1-t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1-t^2}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C;$$

(j) A $t = \ln x$ helyettesítéssel $x = e^t \Rightarrow \; \mathrm{d}x = e^t \; \mathrm{d}t$, így

$$\int \sin(\ln x) \; \mathrm{d}x = \int e^t \cdot \sin t \; \mathrm{d}t = e^t \sin t - \int e^t \cos t \; \mathrm{d}t = e^t \sin t - \left(e^t \cos t + \int e^t \sin t \; \mathrm{d}t \right) =$$
$$= e^t(\sin t - \cos t) - \int e^t \sin t \; \mathrm{d}t;$$

amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\int e^t \cdot \sin t \; \mathrm{d}t = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C,$$

amiből adódik az eredeti feladat megoldása:

$$\int \sin(\ln x) \; \mathrm{d}x = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C = \frac{x}{2}(\sin(\ln x) - \cos(\ln x)) + C.$$

(k) A $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $x = t^2 \Rightarrow \; \mathrm{d}x = 2t \; \mathrm{d}t$, így

$$\int x \sin \sqrt{x} \; \mathrm{d}x = \int 2t^3 \sin t \; \mathrm{d}t = 2 \left(-t^3 \cos t + 3 \int t^2 \cos t \; \mathrm{d}t \right) =$$
$$= -2t^3 \cos t + 6 \left(t^2 \sin t - 2 \int t \sin t \; \mathrm{d}t \right) =$$
$$= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t - 12 \left(-t \cos t + \int \cos t \; \mathrm{d}t \right) =$$
$$= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \sin t + C =$$
$$= \cos \sqrt{x} \left(-2\sqrt{x^3} + 12\sqrt{x} \right) + \sin \sqrt{x}(6x - 12) + C;$$

(l) Legyen $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$, ekkor a $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$ helyettesítéssel $x = 2 \,\mathrm{arc\,tg}\, t \Rightarrow \; \mathrm{d}x = \dfrac{2}{1+t^2} \; \mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{1}{1+\cos x} \; \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} \; \mathrm{d}t = \int 1 \; \mathrm{d}t = t + C = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C.$$

Határozott integrálok kiszámításához az alábbi tétel szerint elég az integrandus egy primitív függvényét ismerni.

1. Tétel (Newton–Leibniz). *Ha f folytonos az $[a,b]$ intervallumon és F primitív függvénye f-nek, akkor*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

1. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

(a)

$$\int_{-1}^{1} x \; \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0;$$
$$\int_0^1 3x^5 - x^2 \; \mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6};$$
$$\int_0^1 e^x \; \mathrm{d}x = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1;$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \; \mathrm{d}x = [\sin x]_{-\pi}^{\pi} = \sin(\pi) - \sin(-\pi) = 0;$$
$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \mathrm{tg}\, x \; \mathrm{d}x = -\big[\ln|\cos x| \big]_{\pi/6}^{\pi/3} = -\ln\cos\frac{\pi}{3} + \ln\cos\frac{\pi}{6} = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} = \ln\sqrt{3}.$$

(b) A primitív függvényt mindkét esetben parciális integrálással határozhatjuk meg.

Egy primitív függvény $xe^x - e^x$, ezért

$$\int_0^2 xe^x \, \mathrm{d}x = [xe^x - e^x]_0^2 = (2e^2 - e^2) - (0e^0 - e^0) = e^2 + 1.$$

Az $x \mapsto x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ függvény egy primitív függvény, így

$$\int_0^3 \operatorname{arc\,tg} x \, \mathrm{d}x = \left[x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^3 = \left(3 \operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}\ln(1+3^2)\right) - 0 = 3 \operatorname{arc\,tg} 3 - \frac{1}{2}\ln 10.$$

(c) Ezekben a feladatokban helyettesítéses integrálással lehet egy-egy primitív függvényt megkeresni.

A $t = 3x+4$ helyettesítés után $x = \frac{t-4}{3}, \ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t$, így

$$\int (3x+4)^3 \, \mathrm{d}x = \int \frac{t^3}{3} \, \mathrm{d}t = \frac{t^4}{12} + C = \frac{(3x+4)^4}{12} + C,$$

ezért

$$\int_1^2 (3x+4)^3 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{(3x+4)^4}{12}\right]_1^2 = \frac{7599}{12} = 633,25.$$

A $t = \sqrt{x}$ helyettesítés után $x = t^2, \ \mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$, így

$$\int e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\int te^t \, \mathrm{d}t = 2\left(te^t - \int e^t \, \mathrm{d}t\right) = 2e^t(t-1) + C = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C,$$

ezért

$$\int_0^1 e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = 2\left[e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)\right]_0^1 = 2.$$

A $t = \arcsin x$ helyettesítés után $x = \sin t, \ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, így

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x &= \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t \, \mathrm{d}t = \int \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int 1 + \cos 2t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C,\end{aligned}$$

ezért

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Végül a $t = e^x$ helyettesítés után $x = \ln t, \ \mathrm{d}x = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, így

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \int 1 - \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t = t - \ln|1+t| + C = e^x - \ln(e^x+1) + C,$$

vagyis

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x} \, \mathrm{d}x = [e^x - \ln(e^x+1)]_0^1 = (e - \ln(e+1)) - (1 - \ln 2).$$

2. Számítsuk ki az alábbi síkidomok területét!

(a) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 4 - x^2\right\}$;

(b) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 \le y \le x + 2\right\}$;

(c) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \ge 0, \ x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}$;

(d) az $y = \sin x$ és az $y = (2/\pi)x$ görbék által határolt síkidom az első síknegyedben.

Megoldás. (a) A megadott parabola az $x = \pm 2$ pontokban metszi az x-tengelyt, a keresett terület pedig az $y = 4 - x^2$ függvény grafikonja alatti terület a $[-2, 2]$ intervallumon, ami $\int_{-2}^{2} 4 - x^2 \, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$.

(b) A kérdéses síkidom nem más, mint az $y = x + 2$ egyenes és az $y = x^2$ parabola által bezárt síkrész. Az egyenes és a parabola metszéspontjainak abszcisszái -1 és 2. A keresett területet nem más, mint a $[-1, 2]$ intervallumon értelmezett $f(x) = x+2$ grafikonja alatti terület és a $g(x) = x^2$ grafikonja alatti terület különbsége. A Newton-Leibniz formulából az első terület $\int_{-1}^{2} x+2 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-1}^{2} = (2+4) - (\frac{1}{2} - 2) = \frac{15}{2}$, míg a második $\int_{-1}^{2} x^2 \, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - (\frac{-1}{3}) = 3$. Tehát a kérdéses terület $\frac{15}{2} - 3 = \frac{9}{2}$.

(c) A kérdéses terület két integrál különbségeként áll elő: a $[0, 1]$ intervallumon értelmezett $f(x) = \sqrt{x}$ és a $g(x) = x^2$ függvények grafikonja alatti területek különbségeként. A terület tehát $\int_0^1 \sqrt{x} \, dx - \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

(d) A keresett terület most is megkapható két integrál különbségeként: $T = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx - \int_0^{\pi/2} (2/\pi) x \, dx = 1 - \pi/4$.

10. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

(a) $\begin{cases} \dot{x}(t) &= 0.2x(t) \\ x(0) &= 1 \end{cases}$

Megoldás: Elsőként megkeressük az egyenlet összes megoldását. A gyakorlaton tanultuk, hogy az

$$\dot{x}(t) = Kx(t)$$

alakú egyenlet megoldásai

$$x(t) = C \cdot e^{Kt}$$

alakúak, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Így a feladatban szereplő egyenlet összes megoldása:

$$x(t) = C \cdot e^{0.2t}.$$

Következő lépésként ezen megoldások közül kiválasztjuk azt, amelyre a kezdeti feltétel, azaz $x(0) = 1$ is teljesül. Ehhez helyettesítsünk be 0-t a megoldás képletébe:

$$x(0) = C \cdot e^{0.2 \cdot 0} = C.$$

Így $x(0) = 1$ pontosan akkor fog teljesülni, ha $C = 1$-et választunk.
Azaz a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$x(t) = e^{0.2t}$$

(i) $\begin{cases} x'(t) &= (t^3 - 2t + 1)e^{3t} \\ x(0) &= 2 \end{cases}$

Megoldás: Ez egy integrálható egyenlet, hiszen a bal oldalon nem szerepel $x(t)$ semmilyen formában. Így mindkét oldal primitív függvényeit keresve megkapjuk az egyenelet megoldásait. Elsőként tehát most is megkeressük az egyenlet összes megoldását.
A jobb oldal, azaz $x'(t)$ primitív függvénye $x(t)$. A bal oldal összes primitív függvényét úg kapjuk meg, hogy a kiszámoljuk annak határozatlan integrálját:

$$\begin{aligned}
\int (t^3 - 2t + 1)e^{3t} \mathrm{d}t &= \tfrac{1}{3}e^{3t}(t^3 - 2t + 1) - \int \frac{1}{3}e^{3t}(3t^2 - 2)\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{3}e^{3t}(t^3 - 2t + 1) - \left(\tfrac{1}{9}e^{3t}(3t^2 - 2) - \int \frac{1}{9}e^{3t} \cdot 6t\mathrm{d}t\right) \\
&= \tfrac{1}{3}e^{3t}(t^3 - 2t + 1) - \tfrac{1}{9}e^{3t}(3t^2 - 2) + \tfrac{2}{9}e^{3t} \cdot t - \int \frac{2}{9}e^{3t}\mathrm{d}t \\
&= \tfrac{1}{3}e^{3t}(t^3 - 2t + 1) - \tfrac{1}{9}e^{3t}(3t^2 - 2) + \tfrac{2}{9}e^{3t} \cdot t - \tfrac{2}{27}e^{3t} + C \\
&= e^{3t} \cdot \left(\tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{3}t^2 - \tfrac{4}{9}t + \tfrac{13}{27}\right) + C
\end{aligned}$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Így az egyenlet összes megoldása:

$$x(t) = e^{3t} \cdot \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{13}{27}\right) + C.$$

Következő lépésként ezen megoldások közül kiválasztjuk azt, amelyre a kezdeti feltétel, azaz $x(0) = 2$ is teljesül. Ehhez helyettesítsünk be 0-t a megoldás képletébe:

$$x(0) = \frac{13}{27} + C.$$

Így $x(0) = 2$ pontosan akkor fog teljesülni, ha $\frac{13}{27} + C = 2$ teljesül, azaz ha $C = \frac{41}{27}$.
Azaz a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$x(t) = e^{3t} \cdot \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t^2 - \frac{4}{9}t + \frac{13}{27}\right) + \frac{41}{27}.$$

(k) $\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & 7(9 - x(t)) \\ x(0) & = & -2 \end{array} \right.$

Megoldás: Ez egy elsőrendű lineáris egyenlet, amit kétféleképpen is megoldhatunk. Itt az első megoldási módszert írom le, a másik módszer a következő feladatban szerepel. Elsőként most is megkeressük az egyenlet összes megoldását.
Az egyenletet a következőképpen alakítjuk:

$$\begin{array}{rcll} x'(t) & = & 7(9 - x(t)) & \\ x'(t) & = & -7x(t) + 63 & \Big/ + 7x(t) \\ x'(t) + 7x(t) & = & 63 & \Big/ \cdot e^{7t} \\ x'(t)e^{7t} + 7e^{7t}x(t) & = & 63e^{7t} & \\ \left[x(t)e^{7t}\right]' & = & 63e^{7t} & \Big/ \text{integráljuk mindkét oldalt} \\ x(t)e^{7t} & = & \displaystyle\int 63e^{7t}\mathrm{d}t = \frac{63}{7}e^{7t} + C & \Big/ \cdot e^{-7t} \\ x(t) & = & 9 + C \cdot e^{-7t} & \end{array}$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans. Így az egyenlet összes megoldása:

$$x(t) = 9 + C \cdot e^{-7t}.$$

Következő lépésként ezen megoldások közül kiválasztjuk azt, amelyre a kezdeti feltétel, azaz $x(0) = -2$ is teljesül. Ehhez helyettesítsünk be 0-t a megoldás képletébe:

$$x(0) = 9 + C.$$

Így $x(0) = -2$ pontosan akkor fog teljesülni, ha $9 + C = -2$ teljesül, azaz ha $C = -11$.
Azaz a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$x(t) = 9 - 11 \cdot e^{-7t}.$$

(n) $\left\{ \begin{array}{lcl} x'(t) & = & (t^2 + 2) \cdot (x(t) - 3) \\ x(0) & = & -2 \end{array} \right.$

Megoldás: Ez egy szétválasztható változójú egyenlet. Elsőként ismét az egyenlet összes megoldását keressük meg.

I.: Feltesszük, hogy $x(t)-3\neq 0$.

$$\begin{aligned}
x'(t) &= (t^2+2)\cdot(x(t)-3) && \Big/ : (x(t)-3)\\
\frac{x'(t)}{x(t)-3} &= t^2+2 && \Big/ \text{integráljuk mindkét oldalt}\\
\int \frac{x'(t)}{x(t)-3}\mathrm{d}t &= \int t^2+2\mathrm{d}t &&\\
\ln|x(t)-3| &= \frac{t^3}{3}+2t+C && \Big/ C\in\mathbb{R}\ \text{tetsz.}\\
|x(t)-3| &= e^{\frac{t^3}{3}+2t+C} &&\\
|x(t)-3| &= e^{C}\cdot e^{\frac{t^3}{3}+2t} &&\\
|x(t)-3| &= C\cdot e^{\frac{t^3}{3}+2t} && \Big/ C>0\ \text{tetsz.}\\
x(t)-3 &= \pm C\cdot e^{\frac{t^3}{3}+2t} &&\\
x(t)-3 &= C\cdot e^{\frac{t^3}{3}+2t} && \Big/ C\neq 0\ \text{tetsz.}\\
x(t) &= C\cdot e^{\frac{t^3}{3}+2t}+3 && \Big/ C\neq 0\ \text{tetsz.}
\end{aligned}$$

II.: Megnézzük, hogy mi van, ha $x(t)-3=0$ teljesül, azaz $x(t)=3$. Az egyenlet mindkét oldalába behelyettestve könnyen látható, hogy ez is megoldás lesz, hiszen $x'(t)=3'=0$, és $(t^2+2)\cdot(x(t)-3)=(t^2+2)\cdot(3-3)=0$, azaz az $x(t)=3$ konstans függvény is megoldása az egyenletnek. Végül vegyük észre, hogy ezt a függvényt kapjuk akkor is, ha az I. pontban kapott képletbe $C=0$-t helyettesítünk. (Ez volt az egyetlen C, amit ott nem engedtünk meg, "kihagytunk".)

Így az egyenlet összes megoldása:

$$x(t)=C\cdot e^{\frac{t^3}{3}+2t}+3,$$

ahol $C\in\mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

Következő lépésként ezen megoldások közül kiválasztjuk azt, amelyre a kezdeti feltétel, azaz $x(0)=-2$ is teljesül. Ehhez helyettesítsünk be 0-t a megoldás képletébe:

$$x(0)=C\cdot e^0+3=C+3.$$

Így $x(0)=-2$ pontosan akkor fog teljesülni, ha $C+3=-2$ teljesül, azaz ha $C=-5$.

Azaz a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$x(t)=-5\cdot e^{\frac{t^3}{3}+2t}+3.$$

11. gyakorlat

1. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-feladatokat!

(a) $\begin{cases} \ddot{x}(t)+\dot{x}(t) = 0\\ x(0) = 2\\ \dot{x}(0) = 1\end{cases}$

Megoldás: Az elsőrendű egyenletekhez hasonlóan itt is először az egyenlettel foglalkozunk csak. Tehát elsőként keressük meg az összes olyan $x(t)$ függvényt, amely megoldása az

$$\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)=0$$

egyenletnek. Ehhez felírjuk az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinomot:

$$\lambda^2+\lambda=0$$

Ennek megoldásai $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = 0$. Mivel a karakterisztikus egyenletnek két különböző valós megoldása van, így az egyenlet összes megoldása:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot e^{0 \cdot t} = C_1 \cdot e^{-t} + C_2,$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.
Ezután a megoldások közül kiválasztjuk azt, amelyik a kezdeti feltételeket, azaz $x(0) = 2$-t és $x'(0) = 1$-et is teljesíti.

$$x(0) = C_1 + C_2,$$

valamint

$$x'(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 \Longrightarrow x'(0) = -C_1 + C_2.$$

Így a kezdeti feltételek teljesítéséhez olyan C_1 és C_2 konstansokat kell keresnünk, melyekre

$$C_1 + C_2 = 2, \quad \text{és} \quad -C_1 + C_2 = 1$$

igaz. AZ első egyenletből $C_2 = 2 - C_1$, ezt a másodikba helyettesítve: $-C_1 + 2 - C_1 = 1 \Rightarrow -2C_1 = -1 \Rightarrow C_1 = 1/2$. Így $C_2 = 2 - 1/2 = 3/2$.
Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{3}{2}.$$

(b) $\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(0) &= 1 \end{cases}$

Megoldás: Elsőként keressük meg az összes olyan $x(t)$ függvényt, amely megoldása az

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + x(t) = 0$$

egyenletnek. Ehhez felírjuk az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinomot:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

Ennek megoldásai $\lambda_1 = -1$ és $\lambda_2 = -1$. Mivel a karakterisztikus egyenletnek két egyenlő valós megoldása van, így az egyenlet összes megoldása:

$$x(t) = C_1 \cdot e^{-t} + C_2 \cdot t \cdot e^{-t},$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok.
Ezután a megoldások közül kiválasztjuk azt, amelyik a kezdeti feltételeket, azaz $x(0) = 0$-t és $x'(0) = 1$-et is teljesíti.

$$x(0) = C_1,$$

valamint

$$x'(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}(1 - t) \Longrightarrow x'(0) = -C_1 + C_2.$$

Így a kezdeti feltételek teljesítéséhez olyan C_1 és C_2 konstansokat kell keresnünk, melyekre

$$C_1 = 0, \quad \text{és} \quad -C_1 + C_2 = 1$$

igaz. AZ első egyenletből rögtön adódik, hogy $C_1 = 0$, ezt a másodikba helyettesítve: $C_2 = 1$.
Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$x(t) = t \cdot e^{-t},$$

(c) $\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) &= 0 \\ x(0) &= 1 \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{cases}$

Megoldás: Elsőként keressük meg az összes olyan $x(t)$ függvényt, amely megoldása az

$$\ddot{x}(t) + x(t) = 0$$

egyenletnek. Ehhez felírjuk az egyenlethez tartozó karakterisztikus polinomot:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Ennek megoldásai $\lambda_{1,2} = \pm\imath$. Mivel a karakterisztikus egyenletnek komplex megoldásai vannak, így az egyenlet összes megoldása:

$$x(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t),$$

ahol $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstansok. (Emlékeztetőül: $\lambda_{1,2} = A \pm B\imath$ gyökök esetén az egyenlet megoldásai: $x(t) = e^{At}(C_1 \cos(Bt) + C_2 \sin(Bt))$.)

Ezután a megoldások közül kiválasztjuk azt, amelyik a kezdeti feltételeket, azaz $x(0) = 1$-t és $x'(0) = 0$-t is teljesíti.

$$x(0) = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2,$$

valamint

$$x'(t) = C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t) \Longrightarrow x'(0) = C_1$$

Így a kezdeti feltételek teljesítéséhez olyan C_1 és C_2 konstansokat kell keresnünk, melyekre

$$C_2 = 1, \text{ és } C_1 = 0$$

igaz.

Tehát a kezdetiérték-feladat megoldása:

$$x(t) = \cos(t),$$

2. Oldjuk meg az alábbi peremérték-feladatokat!

(a) $$\begin{cases} \ddot{x}(t) - 2\dot{x}(t) + 2x(t) &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(\pi) &= e^{\pi} \end{cases}$$

Megoldás: A kezdetiérték-feladatokhoz hasonlóan járunk el: először megadjuk az egyenlet össze megoldását, majd ezek közül kiválasztjuk az összes olyat, ami a plusz feltételeket is teljesíti. A különbség az lesz, hogy míg a kezdetiérték-feladatok esetében tetszőleges egyenlet és kezdeti feltétel esetén egyértelmű megoldás létezett, a peremérték-feladatoknál előfordulhat, hogy végtelen sok megoldás létezik vagy hogy egyetlen megoldás sem létezik. De természetesen peremérték-feladatoknál is kaphatunk egyértelmű megoldást.

Az egyenlet megoldásainak megkereséséhez oldjuk meg az egyenlethez tartozó

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

karakterisztikus egyenletet. Ennek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2\imath}{2} = 1 \pm \imath.$$

Így az egyenlet megoldásai:

$$x(t) = e^t(C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t))$$

Következő lépésként nézzük meg, hogy milyen C_1 és C_2 konstansok esetén teljesülnek a megoldásra a peremfeltételek.

$$x(0) = C_1$$

miatt csak $C_1 = 0$ jöhet szóba, így a lehetséges megoldások $x(t) = C_2 e^t \sin(t)$ alakúak. Valamint

$$x'(t) = C_2(e^t \sin(t) + e^t \cos(t) \Longrightarrow x'(\pi) = -C_2 e^{\pi}.$$

Így az $\dot{x}(\pi) = e^{\pi}$ feltétel teljesüléséhez $-C_2 e^{\pi} = e^{\pi}$, azaz $C_2 = -1$ kell.

Tehát egyértelműen létezik megoldás:

$$x(t) = -e^t \sin(t).$$

(b) $$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ x(2\pi) &= 0 \end{cases}$$

Megoldás: Az egyenlet megoldásainak megkereséséhez oldjuk meg az egyenlethez tartozó

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

karakterisztikus egyenletet. Ennek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \pm\imath.$$

Így az egyenlet megoldásai:

$$x(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$$

Következő lépésként nézzük meg, hogy milyen C_1 és C_2 konstansok esetén teljesülnek a megoldásra a peremfeltételek.

$$x(0) = C_1$$

miatt csak $C_1 = 0$ jöhet szóba, így a lehetséges megoldások $x(t) = C_2 \sin(t)$ alakúak. Valamint

$$x(2\pi) = C_2 \sin(2\pi) = C_2 \cdot 0 = 0,$$

azaz a második feltétel tetszőleges $C_2 \in \mathbb{R}$ esetén igaz.
Tehát végtelen sok megoldás van:

$$x(t) = C_2 \cos(t),$$

ahol $C_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

(c) $\begin{cases} 4\ddot{x}(t) + x(t) &= 0 \\ x(0) &= 0 \\ \dot{x}(\pi) &= 1 \end{cases}$

Megoldás: Az egyenlet megoldásainak megkereséséhez oldjuk meg az egyenlethez tartozó

$$4\lambda^2 + 1 = 0$$

karakterisztikus egyenletet. Ennek gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \pm \frac{\imath}{2}.$$

Így az egyenlet megoldásai:

$$x(t) = C_1 \cos(t/2) + C_2 \sin(t/2)$$

Következő lépésként nézzük meg, hogy milyen C_1 és C_2 konstansok esetén teljesülnek a megoldásra a peremfeltételek.

$$x(0) = C_1$$

miatt csak $C_1 = 0$ jöhet szóba, így a lehetséges megoldások $x(t) = C_2 \sin(t/2)$ alakúak. Valamint

$$\dot{x}(t) = \frac{C_2}{2} \cos(t/2) \Longrightarrow \dot{x}(\pi) = -\frac{C_2}{2} \cos(\pi/2) = -\frac{C_2}{2} \cdot 0 = 0$$

azaz a második feltétel, $\dot{x}(\pi) = 1$, semmilyen $C_2 \in \mathbb{R}$ esetén nem lehet igaz.
Tehát ennek a feladatnak nem létezik megoldása.