

KALKULUS I. GYAKORLAT
FIZIKA BSC I/1.

3. gyakorlat, 2019. 09. 26.

(Jelölés: **Házi feladat (a következő heti röpzh anyaga) az emelt szintű csoportnak)**

Emlékeztetőül: az (a_n) sorozat határértéke az $a \in \mathbb{R}$ szám, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ -ra $|a_n - a| < \varepsilon$. (Vagyis a sorozat tagjai egy indextől kezdve az $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ intervallumba esnek.) Sorozatok határértékét általában nem a definíció alapján, hanem a műveleti szabályok és a nevezetes határértékek segítségével számítjuk ki. A $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ alakú sorozatoknál valamilyen ügyes átalakítás szükséges.

Nevezetes határértékek: (a) ha $|q| < 1$, akkor $q^n \rightarrow 0$; (b) ha $a > 0$, akkor $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$, (c) $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

Legyen most $a > 1$, $k \in \mathbb{N}$. Ekkor az n^k , a^n , $n!$ és n^n sorozatok mindegyike végtelenhez tart, még hozzá egyre gyorsabban, amint ezt az alábbi határértékek mutatják: (d) $\frac{n^k}{a^n} \rightarrow 0$, (e) $\frac{a^n}{n!} \rightarrow 0$, (f) $\frac{n^k}{n!} \rightarrow 0$, (g) $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$.

1. Mi a határértéke az alábbi (a_n) sorozatoknak? Definíció alapján adott $\varepsilon > 0$ -hoz adjunk meg $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindexet is.

$$(a) \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad (b) \quad a_n = \frac{6n + 7}{11n - 5}.$$

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét a határérték és a műveletek közötti szabályok segítségével!

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad (b) \quad \frac{2}{n}, \quad (c) \quad \frac{3}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad (d) \quad \frac{\sqrt[3]{2}}{n^2 + 1}.$$

3. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \quad \frac{n + 2}{3n - 4} \quad (b) \quad \frac{2n^2 - 3n - 5}{6 - n^2} \quad (c) \quad \frac{\sqrt{n^2 + 3} + 2n}{3n + 5}$$
$$(d) \quad \frac{3^n - 5 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n + 1, 8^{n+5}} \quad (e) \quad \frac{3^{2n} - 4 \cdot 2^{n+3}}{5^n - 2 \cdot 9^{n+1} + n^6} \quad (f) \quad \frac{2n! + 3^n}{5n^2 - 1 + n!}$$

4. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét!

$$(a) \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \quad (b) \quad \sqrt{n^2 + 6n + 1} - n.$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden konvergens sorozat korlátos. Igaz-e a megfordítás?