Kalkulus I. gyakorlat
Fizika BSc I/1.

1. gyakorlat, 2019. 09. 12.

(Jelölés: Házi feladat (a következő heti röpzh anyaga) az emelt szintű csoportnak)

1. Ábrázoljuk a következő halmazokat a síkon!
   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x+y<1\}$,
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2<4\}$,
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2<4,\ x+y<1\}$,
   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x|+|y|<1\}$.

2. Ha A, B és C adott halmazok, akkor írjuk fel az alábbi halmazokat A, B, C és az $\cup, \cap, \setminus$ halmazműveletek segítségével:
   (a) $E = \{x :\ x \in A$ és $(x \in B$ vagy $x \in C)\}$;
   (b) $F = \{x :\ (x \in A$ és $x \in B)$ vagy $x \in C)\}$.

3. Igazak-e az alábbi halmazegyenlőségek? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, akkor adjunk meg konkrét halmazokat, amelyekre nem teljesül az egyenlőség.
   (a) $(A \cup B) \setminus A = B$;
   (b) $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$;
   (c) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

4. Igazak-e az alábbi állítások?
   (a) $(A \subset B$ és $A \subset C) \iff A \subset (B \cup C)$;
   (b) $(A \cup C = B \cup C$ és $A \setminus C = B \setminus C) \iff A = B$;

5. Legyen X egy halmaz, $A, B \subset X$. Bizonyítsuk be, hogy

$$\text{(a)}\quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \text{(b)}\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

6. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a következő függvények: $f(x) = x+3$, $g(x) = x^2$. Határozzuk meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ függvényeket.

7. Írjuk be a hiányzó függvényeket:

(a)	$f(x) = x^2$	$g(x) = x+1$	$(f \circ g)(x) = ?$
(b)	$f(x) =?$	$g(x) = x+4$	$(f \circ g)(x) = x$
(c)	$f(x) = \sqrt{x}$	$g(x) =?$	$(f \circ g)(x) = \lvert x \rvert$

8. Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények. Igaz-e, hogy ha mindkettő injektív, akkor $f+g$ is injektív?

9. Mely függvények injektívek? Amennyiben létezik, adjuk meg az inverzét!
   (a) $f : [0,1] \to [0,1],\quad f(x) = \sqrt{1-x^2}$;
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\quad g(x) = x^3$;
   (c) $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\quad h(x) = x - \dfrac{1}{x}$;
   (d) $k : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\},\quad k(x) = \dfrac{1}{x}$.

10. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény. Határozzuk meg az $f^{-1}([4,9])$, $f^{-1}([-1,0])$, $f^{-1}([-2,-1])$ halmazokat, ha
    (a) $f(x) = x^2$;
    (b) $f(x) = \sin x$.

11. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy függvény, $A, B \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmazok.
    (a) Mutassuk meg, hogy
        (a) $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$;
        (b) $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$.
    (b) Adjunk példát arra, hogy a fenti tartalmazásoknál általában nincs egyenlőség! (Nézzük meg az előző feladatot.)