

Kiegészítő és beadható feladatok – Kalkulus I., emelt szint, 9. hét

(Jelölés: **Házi feladat** (előadónak beadandó) az emelt szintű csoportnak)

1. Adjuk meg a $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{sgn} x$ függvény integrálfüggvényét!

2. Adjuk meg a $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ függvény integrálfüggvényét!

3. Konvergensek-e az alábbi improprius integrálok? Ha igen, számítsuk ki őket!

(a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^3} dx$ (b) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ (c) $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$ (d) $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2} dx$ (e) $\int_0^2 \ln x dx$

4. Igaz-e, hogy ha $\int_0^{\infty} f$ konvergens, akkor $\lim_{\infty} f = 0$ teljesül (azaz a határérték létezik és nulla)?

5. Igaz-e, hogy ha $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos és $\int_0^{\infty} f$, akkor $\lim_{\infty} f = 0$ is teljesül (azaz a határérték létezik és nulla)?

6. Használjuk a minoráns- vagy majoránskritériumot annak eldöntésére, hogy a következő improprius integrálok konvergensek-e!

(a) $\int_0^{\infty} x^5 e^{-x} dx$ (b) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x} dx$ (c) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$ (d) $\int_1^{\infty} \frac{1}{\ln^5 x} dx$

(e) $\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2} dx$ (f) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ (g) $\int_1^{\infty} \frac{2^x}{e^x + 1} dx$ (h) $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx$