Kiegészítő és beadható feladatok – Kalkulus I., emelt szint, 7. hét

(Jelölés: Házi feladat (előadónak beadandó) az emelt szintű csoportnak)

1. Igazak -e tetszőlges valós függvényekre az alábbi következtetések?
   (a) Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvények (ahol $D(f) = D(g) = [a, b]$), akkor $f + g$ is konvex.
   (b) Ha $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvények (ahol $D(f) = D(g) = [a, b]$), akkor fg is konvex.
   (c) Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény (ahol $D(f) = [a, b]$), akkor f^2 is konvex.
   (d) Ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex függvény (ahol $D(f) = [a, b]$), akkor f mindenhol folytonos.
   (e) Ha $f'' < 0$ teljesül az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvényre, akkor az intervallumban legfeljebb egy szélsőértéke lehet.

2. Számítsuk ki az alábbi sorok összegét!

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 1$

3. Igazoljuk, hogy ha $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $(a_n) \to 0$ teljesül!

4. Mutassunk rá példával, hogy az előző következtetés megfordítása nem igaz!

Elmélet: **Definíció** *(Hatványsor)*: Legyenek $a_n \in \mathbb{R}$ valós számok minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, valamint $x_0 \in \mathbb{R}$. Ekkor a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

sort x_0 körüli hatványsornak nevezzük. □

- Egy hatványsor konvergenciaintervallumának nevezzük azt a $J \subset \mathbb{R}$ halmazt (ez valóban egy intervallum lesz), melyre igaz, hogy $x \in J$ esetén a hatványsor konvergens.
- Az $f : J \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ függvényt a hatványsor összegfüggvényének nevezzük.
- Ha f "szép" (pontos feltételek a jegyzet 10.13-as tételében), akkor az f valamely a pont körüli Taylor-sora előállítja magát a függvényt az a egy $K(a)$ környezetében, azaz:

  $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$$

  igaz minden $x \in K(a)$ esetén.

5. Igazoljuk (pl. a Lagrange-féle maradéktagot vizsgálva), hogy valóban minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek az alábbi egyenlőségek:

   (a) $\displaystyle\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$ (b) $\displaystyle e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} x^j$