Kiegészítő és beadható feladatok – Kalkulus I., emelt szint, 2. hét

(Jelölés: Házi feladat (előadónak beadandó) az emelt szintű csoportnak)

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $a, b \in \mathbb{R}$ számok esetén teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek!
   (a) $|a| + |b| \geq |a + b|$ (b) $||a| - |b|| \leq |a - b|$

2. Igazoljuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek az alábbi azonosságok:
   (a) $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$,
   (b) $\mathrm{ch}^2(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(2x) + 1}{2}$.

3. Igazoljuk, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek az alábbi azonosságok:
   (a) $\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$,
   (b) $\cos(x) - \cos(y) = 2 \sin\left(\dfrac{y-x}{2}\right) \sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.

4. Mutassuk meg, hogy
   (a) $\mathrm{arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $(x \in \mathbb{R})$,
   (b) $\mathrm{arch}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$, $(x \in [1, +\infty))$

5. Alkossunk képet a következő függvényekről!
   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha} x \neq 0, \\ 0, & \text{ha} x = 0. \end{cases}$
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{ha} x \neq 0, \\ 0, & \text{ha} x = 0. \end{cases}$
   (c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) := \begin{cases} x^2 (\sin \dfrac{1}{x} + 2), & \text{ha} x \neq 0, \\ 0, & \text{ha} x = 0. \end{cases}$

6. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. Mutassuk meg, hogy ha $\phi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$\phi(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \qquad \psi(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$
   függvények közül ϕ páros, ψ páratlan, és $f = \phi + \psi$. Ha $f = \exp$, akkor mi lesz a ϕ és ψ függvény?

7. Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy f periodikus a $p > 0$ szám szerint, g pedig a q pozitív szám szerint.
   (a) Mutassuk meg, hogy ha $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, akkor $f + g$ is periodikus. Mi lesz $f + g$ periódusa?
   (b) Keressünk példát arra, hogy ha $\dfrac{p}{q} \notin \mathbb{Q}$, akkor $f + g$ nem periodikus.