

Kiegészítő és beadható feladatok – Kalkulus I., emelt szint, 11. hét

(Jelölés: **Házi feladat (előadónak beadandó) az emelt szintű csoportnak**)

- Egy olajfinomítóban tárolótartályában 8000 liter benzin van, ami eredetileg x_0 kilogramm adalékot tartalmaz oldott állapotban. A téli időjárásra való előkészület miatt percnként 160 liter olyan benzint pumpálnak a tartályba, amelyik a kilogramm adalékot tartalmaz literenként. A jól kevert folyadékot percnként 180 liter sebességgel engedik ki a tartályból.
 - Adjuk meg az adalék mennyiségét leíró differenciálegyenletet!
 - Mennyi adalékanyag lesz a tartályban 20 perccel az eljárás megkezdése után, ha kezdetben a benzin 50 kg adalékanyagot tartalmazott és literenként 0.25 kg adalékanyagot tartalmazó benzint eresztettünk a tartályba?
 - A keverés után 10 perccel 300 kg adalékanyag van a benzinben úgy, hogy literenként 0.1 kg adalékanyagot tartalmazó benzint eresztettünk a tartályba. Mennyi adalékanyagot tartalmazott a benzin kezdetben?
 - Mennyi adalékanyagot kell tartalmaznia a befolyó benzinnek a kezdeti x_0 mennyiség függvényében ahhoz, hogy az x_0 adalékanyag-mennyiség fél óra alatt a kétszeresére növekedjen?
 - A befolyó benzin literenként 0.2 kg adalékanyagot tartalmaz. Mennyi ideig kell várni, hogy a kezdeti x_0 adalékanyag-mennyiség a kétszeresére növekedjen?
- Oldjuk meg!

$$(a) \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{2x(t)}{t} + 1 \\ x(1) = 2 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} t^2 + t\dot{x}(t) = x(t) \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) - t^2 + 2t - 2 \\ x(1) = 1 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} \dot{x}(t) - x(t)\operatorname{tg}(t) = \frac{1}{\cos(t)} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

- Vizsgáljuk meg az alábbi peremérték-feladat megoldhatóságát a $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében!

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \lambda^2 x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(\pi) = 1 \end{cases}$$

- Jelöljük egy lengőajtónak a – nyugalmi állapotához képest bezárt – szögét a t időpontban $\theta(t)$ -vel. Az ajtó lengésének dinamikáját az

$$I\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + k\theta(t) = 0$$

egyenlettel modellezzük, ahol $I > 0$ az ajtó – forgási tengelyéhez viszonyított – tehetetlenségi nyomatéka, $b > 0$ a súrlódási tényező és $k > 0$ rugóállandó. Tegyük fel, hogy I és k rögzített, a b súrlódási tényezőt pedig egy állítócsavarral tudjuk változtatni. Hogyan válasszuk meg b értékét úgy, hogy az ajtó ne lengjen oda-vissza (ne oszcilláljon)?