

1. feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Keressük meg az alábbi egyenletek $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ klasszikus megoldásait!

- | | |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| a) $\partial_y u = 0$ | e) $\partial_x u - \partial_y u = 0$ |
| b) $\partial_{xy} u = 0$ | f) $\partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0$ |
| c) $\partial_{xy} u = \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2}$ | g) $\partial_x^2 u - a^2 \partial_y^2 u = 0 \quad (a \in \mathbb{R})$ |
| d) $\partial_{xy} u + 2x \partial_y u = x$ | h) $(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 = 0$ |

2. Adjuk meg a $\partial_x^2 u(x, y, z) = 0$ feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ általános megoldását!

3. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladatok $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) $\begin{cases} \partial_{xy} u = x + y \\ u(x, x) = x \\ \partial_1 u(x, x) = 0 \end{cases}$ | b) $\begin{cases} \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \\ u(0, y) = 1 \\ \partial_x u(0, y) = 1 \end{cases}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

4. Keressük meg a $\partial_x^2 u - \partial_y u = 0$ egyenlet $u(x, y) = X(x)Y(y)$ alakú klasszikus megoldásait!

5. Keressünk $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ polinomokat, amelyekre $\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$.

6. Tegyük fel, hogy az $u \in C^4(\mathbb{R}^2)$ függvényre $\Delta u = 0$. Igazoljuk, hogy ekkor a $v(x, y) := (x^2 + y^2)u(x, y)$ függvényre $\Delta^2 v = 0$.

*7. Adjuk meg a $\partial_x u \cdot \partial_y u = 0$ egyenlet $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldásait!