1. zh feladatsor

III. éves alkmat parcdiff 2019. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_{xy} u(x,y) = 8x^3 y, \\ u(\sqrt{x}, x) = 3x^4, \\ u(x,0) = x^8. \end{cases}$$

2. Adjunk meg olyan legalább másodfokú kétváltozós p polinomot, melyre $\Delta p = 0$, $\Delta q = 0$ és $\Delta\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$.

3. Adjuk meg a $x\partial_x u(x,y) - 2y\partial_y u(x,y) = xyu(x,y)$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az $y = 1$ egyenes mentén azonosan e^{x^2-x+1} függvénnyel egyezik meg.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = (x-A)^2$ ($A \in \mathbb{R}^+$ paraméter) görbe nyílt tartományban elliptikus, az alatta lévő tartományben pedig hiperbolikus legyen. Adjunk feltételt az A paraméterre úgy, hogy a $(-1,0)$ pont hiperbolikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = e^{-j^2}\varphi(e^j x)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 0,1,2,\dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^{+\infty} \cos(x)\varphi(x,0)\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Számítsuk ki a $\partial_1^2 u$ disztribúciót!

7. Legyen $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\varepsilon(x) := \dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén $T_{g_\varepsilon} \xrightarrow{\mathscr{D}} \delta_0$ (azaz minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre $T_{g_\varepsilon}(\varphi) \to \varphi(0)$).

1. zh feladatsor

III. éves alkmat parcdiff 2019. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_{xy} u(x,y) = 8x^3 y, \\ u(\sqrt{x}, x) = 3x^4, \\ u(x,0) = x^8. \end{cases}$$

2. Adjunk meg olyan legalább másodfokú kétváltozós p polinomot, melyre $\Delta p = 0$, $\Delta q = 0$ és $\Delta\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$.

3. Adjuk meg a $x\partial_x u(x,y) - 2y\partial_y u(x,y) = xyu(x,y)$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az $y = 1$ egyenes mentén azonosan e^{x^2-x+1} függvénnyel egyezik meg.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y = (x-A)^2$ ($A \in \mathbb{R}^+$ paraméter) görbe nyílt tartományban elliptikus, az alatta lévő tartományben pedig hiperbolikus legyen. Adjunk feltételt az A paraméterre úgy, hogy a $(-1,0)$ pont hiperbolikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = e^{-j^2}\varphi(e^j x)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 0,1,2,\dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^{+\infty} \cos(x)\varphi(x,0)\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Számítsuk ki a $\partial_1^2 u$ disztribúciót!

7. Legyen $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_\varepsilon(x) := \dfrac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$. Mutassuk meg, hogy $\varepsilon \to 0+$ esetén $T_{g_\varepsilon} \xrightarrow{\mathscr{D}} \delta_0$ (azaz minden $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvényre $T_{g_\varepsilon}(\varphi) \to \varphi(0)$).