

1. Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátos, és legyen ekkor $u(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta$.

a) Bizonyítsuk be, hogy $u(0, x) = g(x)$ minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén.

b) Legyen $n = 1$, továbbá tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R})$, amelyre g, g', g'' korlátosak. Mutassuk meg, hogy ekkor $\partial_t u - \partial_x^2 u = 0$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben.

Megoldás. a) Először is jegyezzük meg, hogy g korlátossága miatt az integrál létezik és véges. Másrészt világos (paraméteres impropius integrálok folytonossága miatt), hogy

$$u(0, x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x) d\eta = g(x) \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = g(x),$$

ahol felhasználtuk, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = (\sqrt{\pi})^n$ (lásd az 5. feladatsor 3. feladatát).

b) A feltételekből adódóan a deriválást elvégezhetjük úgy, hogy az integrandust deriváljuk (paraméteres impropius integrálok differenciálhatósága). Ekkor egyszerű számolással adódik, hogy

$$\partial_t u(t, x) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \frac{\eta_j}{\sqrt{t}} d\eta$$

és

$$\begin{aligned} \partial_{x_j}^2 u(t, x) &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \partial_j^2 g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\left[-\frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \right]_{\eta_j=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \frac{\eta_j}{\sqrt{t}} d\eta_j \right), \end{aligned}$$

ahol egy parciális integrálást hajtottunk végre. Vegyük észre, hogy a szögletes zárójelbeli függvény $|\eta| \rightarrow \infty$ esetén 0-hoz tart, hiszen $\partial_j g$ korlátos, a maradék pedig 0-hoz tart, ha $|\eta| \rightarrow \infty$. Így a fentiek alapján

$$\Delta u(t, x) = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} \partial_j g(x - 2\sqrt{t}\eta) \frac{\eta_j}{\sqrt{t}} d\eta$$

tehát $\partial_t u = \Delta u$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben.

A későbbi példák kedvéért érdemes meggondolni, hogy a fenti számítások mind érvényben maradnak, ha a g függvény és deriváltjai „nem nőnek túl gyorsan” (például legfeljebb $e^{|x|}$ nagyságrendűek).

Megjegyezzük, hogy a következőképpen is érvelhettünk volna. A $\xi = x - 2\sqrt{t}\eta$ koordinátatranszformációval kapjuk, hogy

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} g(\xi) d\xi.$$

Az 5. feladatsor 4. feladatában pedig beláttuk, hogy a $(t, x) \mapsto \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}}$ függvény (pontosabban ennek egy eltoltja) kielégíti a hővezetési egyenletet, így a feltételek miatt a függvény paraméter szerinti integrálja is. Ebben az esetben elég a $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ feltételezés, nincs szükség a deriválhatóságra. Jegyezzük meg, hogy az u megoldás minden esetben $C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n)$ (sőt analitikus), függetlenül a g függvény simaságától. A hővezetési egyenlet e tulajdonságát szokás parabolikus simításnak nevezni.

Végül egy fontos dolgot hangsúlyoznunk kell. A hővezetési egyenletre vonatkozó Cauchy-feladatnak nem egyértelmű a megoldása, sőt végtelen sok megoldása van, a fenti formula ezek közül ad meg egyet, a fizikailag reálisat. Végtelen sok megoldás létezésére Andrej Nyikolajevics Tyihonov (1906–1993) adott egyszerű konstrukciót, ezek a megoldások $|x| \rightarrow \infty$ esetén „gyöorsan” növekednek ($e^{|x|^\alpha}$ nagyságrendben). Ha ennél lassabb növekedést kötünk ki, akkor a megoldás egyértelmű, és a fenti formula is érvényes. Megemlítjük, hogy bár végtelen sok megoldás van, David Vernon Widder (1898–1990) amerikai matematikus igazolta, hogy nemnegatív megoldás legfeljebb egy. A nemnegativitási feltétel logikus, ha u az abszolút hőmérsékletet jelenti.

A továbbiakban, ha a hővezetési egyenlethez tartozó Cauchy-feladat megoldásáról beszélünk, akkor a fenti formulával értelmezett megoldásra gondolunk.

2. Oldjuk meg az alábbi parabolikus Cauchy-feladatokat!

a)
$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = \cos x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Megoldás. Használjuk az első részfeladatra vonatkozó megoldóképletet, amelyet az 1. feladatban bizonyítottunk.

a) $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} (x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} x d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} 2t\eta d\eta = x$, felhasználva, hogy $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = 1$, másrészt a második integrandus páratlan függvény, ezért az integrálja nullával egyenlő az origóra szimmetrikus intervallumokon.

b) A megoldóképlet alapján $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \cos(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta$. Alkalmazzuk a \cos függvényre vonatkozó $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ addíciós formulát. Ekkor

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \cos(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} (\cos x \cos 2\sqrt{t}\eta + \sin x \sin 2\sqrt{t}\eta) d\eta = \\ &= \cos x \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} \cos 2\sqrt{t}\eta d\eta = e^{-t} \cos x \end{aligned}$$

adódik, felhasználva egyrészt, hogy a \sin függvény páratlan, így az integrálja nullával egyenlő az origóra szimmetrikus intervallumokon, másrészt pedig a 4. feladatsor 5. feladatában szereplő

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} \cos by dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

összefüggést $a = 1$, $b = 2\sqrt{t}$ választással. Végeredményben tehát $u(t, x) = e^{-t} \cos x$.

3. Legyen $n = 1$, $f = 0$, és tekintsük a parabolikus Cauchy-feladatot.

- a) Tegyük fel, hogy $g \in C(\mathbb{R})$ korlátos. Igazoljuk, hogy ha $g(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor a Cauchy-feladat u megoldására $u(x) \geq 0$ ($x \in \mathbb{R}$).
- b) Tegyük fel, hogy $g \in C^2(\mathbb{R})$ és g , g' , g'' korlátos. Igazoljuk, hogy ha g konvex, akkor minden $t > 0$ esetén a Cauchy-feladat u megoldására $u(t, \cdot)$ is konvex.

Megoldás. a) Ha $g(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, akkor $u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta \geq 0$, hiszen nemnegatív függvény integrálja nemnegatív.

b) Ha g konvex függvény, akkor $g''(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, így $\partial_x^2 u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\eta|^2} g''(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta \geq 0$, azaz $u(t, \cdot)$ is konvex függvény.

Megjegyezzük, hogy hasonlóan igazolható számos egyéb tulajdonság öröklődése a kezdeti feltételről a megoldásra.

4. Bizonyítsuk be, hogy a parabolikus Cauchy-feladat u megoldása folytonosan függ g -től a következő értelemben: ha $g_1, g_2 \in C(\mathbb{R}^n)$ korlátosak, amelyekre $|g_1(x) - g_2(x)| \leq \varepsilon$ ($x \in \mathbb{R}^n$), akkor a parabolikus Cauchy-feladat megfelelő u_1, u_2 megoldásaira $|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \varepsilon$ ($(t, x) \in \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}$).

Megoldás. A feltételek alapján a megoldóképlet felhasználásával adódik, hogy

$$|u_1(t, x) - u_2(t, x)| \leq \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} |g_1(x) - g_2(x)| d\eta \leq \frac{\varepsilon}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} d\eta = \varepsilon.$$

5. Legyen $n = 1$, $f = 0$, $g \in C(\mathbb{R})$, és tegyük fel, hogy $\text{supp } g \subset [a, b]$, valamint $g|_{[a, b]} > 0$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a parabolikus Cauchy-feladat u megoldására $u(t, x) > 0$ minden $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ esetén! (Végtelen sebességű hőterjedés)

Megoldás. A feltételekből következően $g(x - 2\sqrt{t}\eta) \geq 0$, ha $\eta \in I = \left[\frac{x-b}{2\sqrt{t}}, \frac{x-a}{2\sqrt{t}} \right]$, és ezen intervallumon kívüli η -kra $g(x - 2\sqrt{t}\eta) = 0$. Ekkor $u(t, x) = \int_I e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta > 0$, hiszen pozitív függvény integrálja pozitív.

*6. Legyen $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre $\partial_1 g$ létezik és folytonos \mathbb{R}^2 -en. Értelmezzük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt úgy, hogy $f(x) = \int_a^x g(x, y) dy$, ahol $a \in \mathbb{R}$ rögzített. Mutassuk meg, hogy $f'(x) = g(x, x) + \int_a^x \partial_1 g(x, y) dy$.

Megoldás. A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.

7. Tekintsük a

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben,} \\ v(0, x) = f(\tau, x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

feladatcsaládot, ahol $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ paraméter. Tegyük fel, hogy minden $\tau \in \mathbb{R}_0^+$ esetén a feladat $v(\cdot, \cdot; \tau)$ megoldására $v, \partial_t v, \Delta v \in C(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+)$. Értelmezzük ekkor az u függvényt a következőképpen:

$$u(t, x) = \int_0^t v(t - \tau, x; \tau) d\tau.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\partial_t u - \Delta u = f$ $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ -ben és $u(0, x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$), azaz u megoldása a második részfeladatnak. (Duhamel-elv)

Megoldás. Világos, hogy $u(0, x) = \int_0^0 (\dots) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^n$). Ezenkívül a 6. feladat deriválási szabályát alkalmazva

$$\partial_t u(t, x) = v(0, x; t) + \int_0^t \partial_t v(t - \tau, x; \tau) d\tau = f(t, x) + \int_0^t \partial_t v(t - \tau, x; \tau) d\tau,$$

hiszen $v(\cdot, \cdot; \tau)$ megoldása a (*) feladatnak $\tau = t$ paraméter mellett, így $v(0, x; t) = f(t, x)$. Ezenkívül $\Delta u(t, x) = \int_0^t \Delta v(t - \tau, x; \tau) d\tau$, mert a feltételekből következően az integrál deriváltja az integrandus deriváltjának integrálja. A fentieket összevetve

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = \int_0^t (\partial_t v(t - \tau, x; \tau) - \Delta v(t - \tau, x; \tau)) d\tau = f(t, x),$$

ugyanis $\partial_t v(t - \tau, x; \tau) - \Delta v(t - \tau, x; \tau) = 0$ minden $\tau \in \mathbb{R}^+$ esetén, hiszen $v(\cdot, \cdot; \tau)$ kielégíti a (*) feladatot. Megjegyezzük, hogy az 1. feladatban szereplő formula segítségével megadhatjuk a $v(\cdot, \cdot; \tau)$ függvények konkrét alakját. Nevezetesen

$$v(t, x; \tau) = u(t, x) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} f(\tau, x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta = u(t, x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} f(\tau, \xi) d\xi,$$

ahol a $\xi = x - 2\sqrt{t}\eta$ helyettesítést hajtottuk végre (továbbá felhasználtuk, hogy a transzformáció Jacobi-determinánsa $\frac{1}{(2\sqrt{t})^n}$). Ennek megfelelően a 2. részfeladat megoldása

$$u_2(t, x) = \int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} f(\tau, \xi) d\xi d\tau.$$

Így a

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = f & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n\text{-ben,} \\ v(0, x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

parabolikus Cauchy-feladat megoldása

$$u(t, x) = \int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi(t-\tau)})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} g(\xi) d\xi.$$

Megjegyezzük, hogy a Duhamel-elv sokkal általánosabban is érvényes, tetszőleges $\partial_t u - Lu = f$ alakú egyenletekre is, ahol L állandó együtthatós differenciáloperátor. Sőt, hiperbolikus egyenletekre is kiterjeszthető az elv, lásd a következő feladatsort. Valójában közönséges differenciálegyenletek esetében is érvényes, az $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f$, $y^{(j)}(0) = 0$ ($j = 0, \dots, n-1$) kezdetiérték-feladat megoldását megkapjuk az $y_\tau^{(n)} + a_{n-1}y_\tau^{(n-1)} + \dots + a_1y_\tau' + a_0y_\tau = 0$, $y_\tau^{(j)}(0) = 0$ ($j = 1, \dots, n-1$), $y_\tau(0) = f(\tau)$ feladat y_τ megoldásából az $y(t) = \int_0^t y_\tau(t - \tau) d\tau$ integrál segítségével. Más szóval $y(t) = \int_0^t f(\tau)\tilde{y}(t - \tau) d\tau$, ahol \tilde{y} az $\tilde{y}^{(n)} + a_{n-1}\tilde{y}^{(n-1)} + \dots + a_1\tilde{y}' + a_0\tilde{y} = f$, $\tilde{y}^{(j)}(0) = 0$ ($j = 0, \dots, n-1$) kezdetiérték-feladat megoldása, vagyis \tilde{y} (a negatív félegyenesre 0-ként kiterjesztve) éppen alapmegoldása a differenciáloperátorunknak (és így az y megoldást valóban az alapmegoldás és a jobb oldal konvolúciójaként nyerjük).

Jean-Marie Constant Duhamel (1797–1872) francia fizikus és matematikus, aki többek között a hővezetés kapcsán foglalkozott differenciálegyenletekkel. Az elvet valószínűleg nem ő fedezte fel, de a hővezetésről szóló munkái nyomán később róla neveztek el.

8. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatokat!

- a) $\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = x + t & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = e^x & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$
- b) $\begin{cases} \partial_t u - 4\partial_x^2 u + u = e^x & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$

Megoldás. a) Az első részfeladat megoldása a megoldóképletünk alapján

$$u_1(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \cdot e^{x-2\sqrt{t}\eta} d\eta = e^{x+t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta+\sqrt{t})^2} d\eta = e^{x+t},$$

felhasználva, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}$ (lásd az 5. feladatsor 4. feladatát). A második részfeladat megoldását a Duhamel-elv segítségével kereshetjük meg. Segédfeladatunk a következő:

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ v(0, x) = x + \tau & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

A fenti Cauchy-feladat megoldása

$$v(t, x; \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} (x + \tau - 2\sqrt{t}\eta) d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} (x + \tau) d\eta - \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \eta d\eta = x + \tau,$$

hiszen a második integrál páratlan függvény integrálja, tehát nullával egyenlő, az elsőben pedig az 5. feladatsor 4. feladatát használhatjuk. Így a 2. részfeladat megoldása $u_2(t, x) = \int_0^t (x + \tau) d\tau = tx + \frac{t^2}{2}$. A fentiek alapján a Cauchy-feladat megoldása a feladat linearitása miatt a két részfeladat megoldásának összege, vagyis $u(t, x) = e^{x+t} + tx + \frac{t^2}{2}$.

b) Először hozzuk a feladatot a „hagyományos” alakra. Helyettesítsünk a feladatban x helyett $2x$ -et, és legyen $v(t, x) = u(t, 2x)$, ekkor v -re a következő Cauchy-feladatot kapjuk:

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_x^2 v + v = e^{2x} & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ v(0, x) = 4x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Szorozzuk az egyenlet e^t -vel, és legyen $w(t, x) = e^t v(t, x)$, ekkor w -re a következő Cauchy-feladatot nyerjük (felhasználva, hogy $w(0, x) = v(0, x)$):

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_x^2 w = e^{2x+t} & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ w(0, x) = 4x^2 & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Ez már a hagyományos alakú parabolikus Cauchy-feladat. Az 1. részfeladat megoldása a formula szerint

$$w_1(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} (x - 2\sqrt{t}\eta)^2 d\eta = 4x^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta - 16\sqrt{t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \eta d\eta + 16t \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \eta^2 d\eta.$$

Vegyük észre, hogy az $\eta \mapsto e^{-\eta^2} \eta$ függvény páratlan volta miatt a fenti egyenlőség jobb oldalán szereplő második integrál értéke nulla. Az első integrál értéke $4x^2$, felhasználva, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}$ (lásd az 5. feladatsor 4. feladatát). A harmadik integrálban pedig egy parciális integrálást hajthatunk végre az alábbi módon:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \eta^2 d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-\frac{1}{2} e^{-\eta^2} \eta \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \frac{1}{2},$$

ahol felhasználtuk, hogy $e^{-\eta^2} \eta \rightarrow 0$ valahányszor $|\eta| \rightarrow +\infty$, hiszen az exponenciális nullához tartás „legyőzi” a polinomiális végtelenbe tartást. Végül tehát $u_1(t, x) = 4x^2 + 8t$. A 2. részfeladat megoldásához bevezetjük a következő segédfeladatot:

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ v(0, x) = e^{2x+\tau} & (x \in \mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Ennek megoldása

$$v(t, x; \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} \cdot e^{2x-4\sqrt{t}\eta+\tau} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\eta-2\sqrt{t})^2+4t+2x+\tau} d\eta = e^{2x+\tau+4t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = e^{2x+\tau+4t}.$$

Ekkor a Duhamel-elv szerint a 2. részfeladat megoldása

$$u_2(t, x) = \int_0^t e^{2x+\tau+4(t-\tau)} d\tau = e^{2x+4t} \int_0^t e^{-3\tau} d\tau = -\frac{1}{3} e^{2x+4t} (e^{-3t} - 1).$$

A linearitás miatt a Cauchy-feladatunk megoldása a két részfeladat megoldásainak összege, azaz $w(t, x) = 4x^2 + 8t + \frac{1}{3} e^{2x+4t} - \frac{1}{3} e^{2x+t}$, és így $u(t, x) = x^2 e^{-t} + 8t e^{-t} + \frac{1}{3} e^{x+3t} - \frac{1}{3} e^x$.