

1. Vizsgáljuk meg, hogy az alábbi másodrendű differenciáloperátorok (hol) milyen típusúak.

a)  $Lu = \partial_x^2 u + 6\partial_{xy} u + \partial_y^2 u$

b)  $Lu = 6\partial_x^2 u + 8\partial_{xy} u + 8\partial_y^2 u + 2\partial_{xz} u + 6\partial_{yz} u + 10\partial_z^2 u$

c)  $Lu = (x+y)\partial_x^2 u + 2\sqrt{xy}\partial_{xy} u + (x+y)\partial_y^2 u$

**Megoldás.** a) Az operátor együtthatómátrixa (minden pontban)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , amelynek determinánsa  $-8$ , ezért a mátrix indefinit, így az operátor (minden pontban) hiperbolikus.

b) Az operátor együtthatómátrixa (minden pontban)  $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ , amelynek bal felső sarok-aldeterminánsai

pozitívak (rendre 6, 32, 182), így az operátor (minden pontban) elliptikus. Megjegyezzük, hogy a Gersgorin-körök segítségével a determináns kiszámítása nélkül is látható, hogy a mátrix minden sajátértéke pozitív.

c) Az operátor csak  $xy \geq 0$  esetén értelmes. Az együtthatómátrixa  $A(x, y) = \begin{pmatrix} x+y & \sqrt{xy} \\ \sqrt{xy} & x+y \end{pmatrix}$ , melynek determinánsa  $x^2 + xy + y^2$ . Ez 0, ha  $x = y = 0$ , különben a determináns  $y^2 \left[ \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} + 1 \right]$ . Ez egy másodfokú polinom  $\frac{x}{y}$ -ban, amelynek diszkriminánsa negatív, vagyis a polinom mindig pozitív. Ez azt jelenti, hogy a  $(0, 0)$  pont kivételével az egész értelmezési tartományán (azaz  $xy \geq 0$  esetén, azaz az első és a harmadik síknegyedben) elliptikus a differenciáloperátor.

2. Mutassunk olyan differenciáloperátort (folytonos együtthatófüggvényekkel), amely  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ -on elliptikus,  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ -on és  $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$ -on hiperbolikus. Igaz-e, hogy egy ilyen differenciáloperátor  $\{0\} \times \mathbb{R}^+$ -on parabolikus?

**Megoldás.** Megmutatjuk, hogy az  $Lu = x\partial_x^2 u + y\partial_y^2 u$  operátor megfelel a feladat első részében kirótt feltételeknek.

Az operátor együtthatómátrixa  $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$ , amelyről világos, hogy  $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  esetén pozitív definit,  $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$  és  $(x, y) \in \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^+$  esetén pedig indefinit, így a kívánt tulajdonságú az operátor. Ha az együtthatómátrix nem folytonos, akkor könnyen tudunk ellenpéldát konstruálni, például az előbbi  $A$  mátrixot (és ezzel az  $L$  operátort)  $(x, y) = (0, 0)$  esetén úgy definiáljuk, hogy a determinánsa ne legyen 0, például  $(Lu)(0, 0) = \partial_x^2 u(0, 0) + \partial_y^2 u(0, 0)$  megfelel.

3. Mutassunk olyan differenciáloperátort (folytonos együtthatófüggvényekkel), amely  $\mathbb{R}^n$  minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus  $\mathbb{R}^n$ -en.

**Megoldás.** Az operátort az együtthatómátrixszával fogjuk megadni, legyen ez  $A(x)$ . Válasszuk  $A(x)$ -et diagonálisnak, a főátlóban álló összes elem legyen  $e^{-x_1}$ . Ekkor minden  $x \in \mathbb{R}^n$  és  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  vektorra  $\langle A(x)p, p \rangle = e^{-n x_1} |p|^2 > 0$ , tehát  $\mathbb{R}^n$  minden pontjában elliptikus az operátor. Viszont  $e^{-n x_1} |p|^2 \rightarrow 0$ , ha  $x_1 \rightarrow +\infty$ , ami azt jelenti, hogy nem egyenletesen elliptikus az operátor.

4. Lehet-e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  korlátos tartományon folytonos együtthatófüggvényekkel olyan differenciáloperátort megadni, amely az  $\Omega$  tartomány minden pontjában elliptikus, de nem egyenletesen elliptikus  $\Omega$ -n. Mi a helyzet akkor, ha az együtthatófüggvények  $\overline{\Omega}$ -on folytonosak, és az operátor  $\overline{\Omega}$  minden pontjában elliptikus?

**Megoldás.** Az első kérdésre a válasz igen. Legyen  $\Omega = (0, 1)^n$ , az  $A(x)$  együtthatómátrix pedig legyen diagonális, amelyben az  $i$ -edik diagonális elem  $x_i$ . Ekkor nyilván  $\Omega$  minden pontjában elliptikus az operátor, de nem egyenletesen elliptikus  $\Omega$ -n, hiszen  $\langle A(x)p, p \rangle = x_1 \cdots x_n > 0$  az  $\Omega$  tartomány minden pontjában, azonban  $x_1 \cdots x_n \rightarrow 0$ , ha  $x_i \rightarrow 0$  minden  $i$ -re. Ha az operátor együtthatói a tartomány lezártján folytonosak, akkor viszont a pontonkénti ellipticitásból következik az egyenletes ellipticitás. Tegyük fel ugyanis, hogy az  $A(x)$  mátrixszal adott differenciáloperátor együtthatófüggvényei folytonosak a tartomány lezártján. Ekkor az  $(x, p) \mapsto \langle A(x)p, p \rangle$  függvény folytonos az  $\overline{\Omega} \times S$  halmazon (ahol  $S$  jelöli az origó sugarú  $n$  dimenziós egységgömb felületét). Ráadásul az ellipticitás miatt szigorúan pozitív is a függvény, így a folytonosság és az  $\overline{\Omega} \times S$  halmaz kompaktsága miatt létezik  $c_0 > 0$  úgy, hogy  $\langle A(x)p, p \rangle \geq c_0$  minden  $(x, p) \in \overline{\Omega} \times S$  pár esetén. Most legyen  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tetszőleges, ekkor  $\frac{p}{|p|} \in S$ , így  $\langle A(x)p, p \rangle = |p|^2 \left\langle A(x) \frac{p}{|p|}, \frac{p}{|p|} \right\rangle \geq c_0 |p|^2$ . Az operátor tehát szükségképpen egyenletesen elliptikus  $\Omega$ -n.

5. Adjunk meg  $a, b, c$  nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az  $Lu = a(x, y)\partial_x^2 u + b(x, y)\partial_{xy} u + c(x, y)\partial_y^2 u$  másodrendű differenciáloperátor a felső nyílt félsíkban elliptikus, az alsó nyílt félsíkban pedig hiperbolikus legyen.

**Megoldás.** Legyen például  $a(x, y) = y^2$ ,  $b(x, y) = 2xy$  és  $c(x, y) = x^2 + y$ . Ekkor az  $L$  operátor együtthatómátrixa

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 + y \end{pmatrix}.$$

A mátrix bal felső eleme a nyílt felső és alsó félsíkban mindig pozitív, másrészt  $\det A(x, y) = y^3$ , amely  $y > 0$  esetén pozitív,  $y < 0$  esetén negatív, tehát a mátrix a felső nyílt félsíkban elliptikus (sőt mindkét sajátértéke pozitív), az alsó nyílt félsíkban hiperbolikus. Egy másik példa:

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1+y & y \\ y & y \end{pmatrix}.$$

Mivel  $\det A(x, y) = y$ , ezért  $A$  elliptikus a felső nyílt félsíkban és hiperbolikus az alsó nyílt félsíkban.

6. Adjunk meg  $a, b$  nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az  $Lu = a(x, y)\partial_x^2 u + x^2\partial_{xy}u + y^2\partial_{yx}u + b(x, y)\partial_y^2 u$  másodrendű differenciáloperátor elliptikus a  $B(0, 1)$  körlap belsejében és az  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{B(0, 2)}$  végtelen körgyűrű belsejében, továbbá hiperbolikus a  $B(0, 2) \setminus \overline{B(0, 1)}$  körgyűrű belsejében (ahol  $B(0, R)$  jelöli az origó középpontú  $R$  sugarú nyílt körlapot a síkon).

**Megoldás.** Az  $L$  operátor együtthatómátrixa

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a(x, y) & \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \\ \frac{1}{2}(x^2 + y^2) & b(x, y) \end{pmatrix}.$$

Olyan  $a, b$  polinomokat kell keresnünk, amelyre  $\det A(x, y) = a(x, y)b(x, y) - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2$  negatív  $1 < r^2 := x^2 + y^2 < 4$  esetén, továbbá  $\det A$  pozitív  $r^2 < 1$  és  $r^2 > 4$  esetén. Vegyük észre, hogy az  $(r^2 - 1)(r^2 - 4)$  polinom teljesíti a  $\det A$ -ra vonatkozó utóbbi feltételeket, így  $a(x, y)b(x, y) = (r^2 - 1)(r^2 - 4) + \frac{1}{4}r^4 = \frac{5}{4}(r^2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{5}})(r^2 - 2 - \frac{2}{\sqrt{5}})$ , tehát például  $a(x, y) = \frac{5}{4}(x^2 + y^2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{5}})$  és  $b(x, y) = (r^2 - 2 - \frac{2}{\sqrt{5}})$  megfelel a feladat feltételeinek. Egy szebb példát nyerhetünk a következőképpen. Legyen  $\det A(x, y) = \frac{1}{2}(r^2 - 1)(r^2 - 4)$ , ekkor  $a(x, y)b(x, y) = \frac{1}{4}(3r^2 - 4)(r^2 - 2)$ , tehát például  $a(x, y) = \frac{1}{4}(3x^2 + 3y^2 - 4)$  és  $b(x, y) = x^2 + y^2 - 2$  ugyancsak megfelel a feladat feltételeinek.

7. Transzformáljuk kanonikus alakra a következő másodrendű differenciálegyenleteket!

a)  $4\partial_{xy}u + 2\partial_yu + u = x + y$

b)  $\partial_x^2u + 2\partial_{xy}u + \partial_y^2u + \partial_xu + u = x - y$

**Megoldás.** a) A főrészt transzformációjával kezdjük, ennek együtthatómátrixa  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . A karakterisztikus egyenlet  $\lambda^2 - 4 = 0$ , amelynek gyökei  $\pm 2$ , a sajátértékek. Könnyen látható, hogy az  $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  vektorok ortonormált sajátvektorok. Szorozzuk meg mindkét sajátvektort a sajátérték abszolútértékének gyökével, és válasszuk az így kapott  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  vektorokat az új koordinátatengelyeknek. Ekkor a transzformáció áttérési mátrixa

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

amelyre

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(Ez utóbbi inverz könnyen láthatóan úgy nyerhető, hogy az ortonormált sajátvektorokat leosztjuk a hozzá tartozó nemnulla sajátértékkel, és a kapott mátrixot transzponáljuk.) Ennek alapján vezessük be a  $(\xi, \eta) = S^{-1}(x, y)$  koordinátákat, azaz

$$\begin{cases} \xi = \frac{x+y}{2}, \\ \eta = \frac{x-y}{2}, \end{cases}$$

Ekkor a főtengelel-transzformáció tétele alapján az új koordinátákra transzformált operátor főrészenek együtthatómátrixa  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Másrészt az összetett függvény deriválási szabályából egyszerű számolással adódik, hogy

$$(\partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = (\partial_\xi v(\xi, \eta), \partial_\eta v(\xi, \eta)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi, \eta), \frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi, \eta) - \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi, \eta) \right),$$

ami azt jelenti, hogy  $\partial_y u = \frac{1}{2}\partial_\xi v - \frac{1}{2}\partial_\eta v$ . Mindezek alapján a kiindulási egyenletünk az

(1)  $\partial_\xi^2 v - \partial_\eta^2 v + \partial_\xi v - \partial_\eta v + v = 2\xi$

alakot ölti (ahol még azt is felhasználtuk, hogy  $x + y = 2\xi$ ). Ezek után az alacsonyabb rendű tagok transzformálását kell már csak elvégeznünk. Vezessük be a  $w(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{\alpha\xi + \beta\eta}$  függvényt, vagyis  $v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta}$ , ahol az  $\alpha, \beta$  konstansok értékeit szeretnénk meghatározni. Rövid számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}\partial_\xi v(\xi, \eta) &= \partial_\xi w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} - \alpha w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta}, \\ \partial_\xi^2 v(\xi, \eta) &= \partial_\xi^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} - 2\alpha\partial_\xi w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + \alpha^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta},\end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned}\partial_\eta v(\xi, \eta) &= \partial_\eta w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} - \beta w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta}, \\ \partial_\eta^2 v(\xi, \eta) &= \partial_\eta^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} - 2\beta\partial_\eta w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + \beta^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta}.\end{aligned}$$

Ezeket az (??) egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$$\begin{aligned}\partial_\xi^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} - \partial_\eta^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + \\ + (1 - 2\alpha)\partial_\xi w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + (1 - 2\beta)\partial_\eta w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + (1 + \beta - \alpha - \beta^2 + \alpha^2)w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} = 2\xi\end{aligned}$$

egyenletet. A fenti alakból látszódik, hogy célszerű az  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  választás, hiszen ekkor az elsőrendű tagok kiesnek és a fenti egyenlet a

$$\partial_\xi^2 w(\xi, \eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} - \partial_\eta^2 w(\xi, \eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} + w(\xi, \eta)e^{-\frac{1}{2}(\xi+\eta)} = 2\xi$$

alakra egyszerűsödik. Átszorzással kapjuk, hogy a feladatban szereplő egyenlet kanonikus alakja

$$\partial_\xi^2 w - \partial_\eta^2 w + w = 2\xi e^{\frac{1}{2}(\xi+\eta)}.$$

b) A főrészt transzformációjával kezdjük, ennek együtthatómátrixa  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , így a karakterisztikus egyenlet  $(1 - \lambda)^2 - 1 = 0$ , amelynek gyökei 2, 0 a sajátértékek. Könnyen látható, hogy ortonormált sajátvektorrendszert alkotnak a  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  vektorok. Szorozzuk meg az előbbi sajátvektort a sajátérték gyökével, és válasszuk az így kapott  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  vektorokat az új koordinátatengelyeknek. Ekkor az áttérési mátrix  $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ , amelyre  $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ . (Ez utóbbi inverz könnyen láthatóan úgy nyerhető, hogy az ortonormált sajátvektorokat leosztjuk a hozzá tartozó nemnulla sajátértékekkel, és a kapott mátrixot transzponáljuk.) Ennek alapján vezessük be a  $(\xi, \eta) = S^T(x, y)$  új változókat, azaz legyen  $\xi = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$  és  $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y$ , továbbá vezessük be a  $v(\xi, \eta) = u(x, y)$  függvényt. Ekkor a főtengelettranszformáció tétele alapján az új koordinátákra transzformált egyenlet főrészének együtthatómátrixa  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Másrészt az összetett függvény deriválási szabályából egyszerű számolással adódik, hogy

$$(\partial_x u(x, y), \partial_y u(x, y)) = (\partial_\xi v(\xi, \eta), \partial_\eta v(\xi, \eta)) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \left( \frac{1}{2}\partial_\xi v(\xi, \eta) + \frac{1}{2}\partial_\eta v(\xi, \eta), \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\xi v(\xi, \eta) - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\eta v(\xi, \eta) \right),$$

ami azt jelenti, hogy  $\partial_x u = \frac{1}{2}\partial_\xi v + \frac{1}{2}\partial_\eta v$ . Mindezek alapján az egyenletünk az

$$(2) \quad \partial_\xi^2 v + \frac{1}{2}\partial_\xi v + \frac{1}{2}\partial_\eta v + v = \sqrt{2}\eta$$

alakot ölti (ahol még azt is felhasználtuk, hogy  $x - y = \sqrt{2}\eta$ ). Ezek után az alacsonyabb rendű tagok transzformálását kell már csak elvégeznünk. Vezessük be a  $w(\xi, \eta) = v(\xi, \eta)e^{\alpha\xi + \beta\eta}$  függvényt, vagyis  $v(\xi, \eta) = w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta}$ , ahol az  $\alpha, \beta$  paraméterek értékeit szeretnénk meghatározni. Rövid számolással adódik, hogy

$$\begin{aligned}\partial_\xi v(\xi, \eta) &= \partial_\xi w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} - \alpha w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta}, \\ \partial_\xi^2 v(\xi, \eta) &= \partial_\xi^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} - 2\alpha\partial_\xi w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + \alpha^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta},\end{aligned}$$

valamint

$$\partial_\eta v(\xi, \eta) = \partial_\eta w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} - \beta w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta}.$$

Ezeket a (??) egyenletbe helyettesítve kapjuk a

$$\partial_\xi^2 w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + \left(\frac{1}{2} - 2\alpha\right)\partial_\xi w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + \frac{1}{2}\partial_\eta w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} + \left(1 + \alpha^2 - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha\right)w(\xi, \eta)e^{-\alpha\xi - \beta\eta} = \sqrt{2}\eta$$

egyenletet. A fenti alakból látszódik, hogy célszerű az  $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{15}{8}$  választás, hiszen ekkor a  $\xi$  szerinti elsőrendű tag, és a nulladrendű tag kiesik és a fenti egyenlet a

$$(3) \quad \partial_{\xi}^2 w(\xi, \eta) e^{-\frac{1}{4}\xi - \frac{15}{8}\eta} + \frac{1}{2} w(\xi, \eta) e^{-\frac{1}{4}\xi - \frac{15}{8}\eta} = \sqrt{2}\eta$$

alakra egyszerűsödik. Átszorzással kapjuk, hogy a feladatban szereplő egyenlet alakja az új koordinátákban

$$\partial_{\xi}^2 w + \frac{1}{2} \partial_{\eta} w = \sqrt{2}\eta e^{\frac{1}{4}\xi + \frac{15}{8}\eta}.$$

Majdnem készen vagyunk, már csak a  $\partial_{\eta} w$  tag együtthatóját kell lenormálnunk. Ezt úgy tehetjük meg, ha bevezetjük a  $\tilde{w}(\xi, \eta) = w(\xi, \frac{1}{2}\eta)$  függvényt. Ekkor  $\partial_{\xi}^2 \tilde{w}(\xi, \eta) = \partial_{\xi}^2 w(\xi, \frac{1}{2}\eta)$  és  $\partial_{\eta} \tilde{w}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} w(\xi, \frac{1}{2}\eta)$ . Ezt a (??) egyenletbe helyettesítve kapjuk a feladatban szereplő egyenlet kanonikus alakját:

$$\partial_{\xi}^2 \tilde{w} + \partial_{\eta} \tilde{w} = \sqrt{2}\eta e^{\frac{1}{4}\xi + \frac{15}{8}\eta}.$$

\*8. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  megoldását!

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u(x, y) - \partial_y^2 u(x, y) - 2\partial_x u(x, y) + u(x, y) &= y \\ u(x, 0) &= e^x \\ \partial_y u(x, 0) &= e^x + 1 \end{aligned}$$

**Megoldás.** A feladat beadható, ezért a megoldást nem árulom el.