2. zh (B) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = \dfrac{x}{3t+2} & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = \cos(2x) & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. Legyenek $f \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R})$ függvények, melyek az x változóra nézve periodikusak valamely $p > 0$ szerint. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben}, \\ u(0,x) = 0 & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0,x) = h(x) & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

hiperbolikus Cauchy-feladat megoldása is periodikus az x változóban.

3. Legyen $[a,b]$ tetszőleges korlátos, zárt intervallum, továbbá $p \in C^1([a,b])$, amelyre $p(x) \geq m > 0$ minden $x \in [a,b]$ esetén és $q \in C([a,b])$, $q > 0$. Definiáljuk az $L\colon L^2(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$ operátort a következőképpen:

$$D(L) := \{u \in C^2(a,b) \cap C^1([a,b])\colon \; -u'(a) + u(a) = 0, u(b) = 0, \; Lu \in L^2(a,b)\}, \quad Lu := -(pu')' + qu.$$

Igazoljuk, hogy ekkor az $L\colon L^2(a,b) \hookrightarrow L^2(a,b)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v\rangle_{L^2(a,b)} = \langle u, Lv\rangle_{L^2(a,b)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L szigorúan pozitív, azaz $\langle Lu, u\rangle_{L^2(a,b)} > 0$ minden $u \in D(L)$, $u \not\equiv 0$ esetén.

4. Tegyük fel, hogy az $u_k : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(k = 1 \dots n)$ függvényekre $\partial_1 u_k - \partial_2^2 u_k = 0$ teljesül. Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$u(t, \mathbf{x}) := \prod_{k=1}^{n} u_k(t, x_k), \qquad (t \geq 0, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_k \in \mathbb{R})$$

függvényre $\partial_t u - \Delta u = 0$ teljesül.

5. Legyen $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + 2y + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} \Delta u = 3x - y & \Omega\text{-ban}, \\ u|_{\partial\Omega} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

6. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_x^2 u(t,x) = t^2 \sin(x) & ((t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi)), \\ u(0,x) = \sin(x) + 3\sin(5x) & (x \in [0,\pi]), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

7. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0,a) \cap C^1([0,a]) : u(0) = 0, \; u'(a) = 0\}, \quad Lu := -u'' + 3u.$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x-2\sqrt{t}\eta)d\eta + \int\limits_0^t \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} f(\tau, x-2\sqrt{t-\tau}\eta)d\eta d\tau$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau,\xi)d\xi d\tau + \frac{1}{2}(g(x+t)+g(x-t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(\xi)d\xi$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ay^2}\ \cos(by)\ dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\frac{b^2}{4a}}, \qquad (a>0,\ b\in\mathbb{R}).$$