

2. zh (A) feladatsor
III. éves alkmát parcdiff 2018. tavasz

1. Oldjuk meg a következő parabolikus Cauchy-feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = \frac{x}{2t+3} & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = e^{2x} & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

2. Legyenek $f \in C^1(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$, $g \in C^2(\mathbb{R})$ függvények, melyek az x változóra nézve periodikusak valamely $p > 0$ szerint. Igazoljuk, hogy ekkor a

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = f & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t u(0, x) = 0 & (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

hiperbolikus Cauchy-feladat megoldása is periodikus az x változóban.

3. Legyen $[a, b]$ tetszőleges korlátos, zárt intervallum, továbbá $p \in C^1([a, b])$, amelyre $p(x) \geq m > 0$ minden $x \in [a, b]$ esetén és $q \in C([a, b])$, $q > 0$. Definiáljuk az $L: L^2(a, b) \hookrightarrow L^2(a, b)$ operátort a következőképpen:

$$D(L) := \{u \in C^2(a, b) \cap C^1([a, b]) : u(a) = 0, u'(b) + u(b) = 0, Lu \in L^2(a, b)\}, \quad Lu := -(pu')' + qu.$$

Igazoljuk, hogy ekkor az $L: L^2(a, b) \hookrightarrow L^2(a, b)$ operátor szimmetrikus, azaz $\langle Lu, v \rangle_{L^2(a, b)} = \langle u, Lv \rangle_{L^2(a, b)}$ minden $u, v \in D(L)$ esetén, továbbá L szigorúan pozitív, azaz $\langle Lu, u \rangle_{L^2(a, b)} > 0$ minden $u \in D(L)$, $u \neq 0$ esetén.

4. Tekintsük a hővezetési egyenletre vonatkozó klasszikus Cauchy-feladatot:

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0 & \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\text{-ben,} \\ u(0, x) = g(x) & (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy ha g páratlan függvény, akkor a feladat egyértelmű megoldása is páratlan minden rögzített t esetén.

5. Legyen $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2x + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ és oldjuk meg a következő elliptikus peremérték-feladatot!

$$\begin{cases} \Delta u = x - 3y & \Omega\text{-ban,} \\ u|_{\partial\Omega} = x^2 + y^2 \end{cases}$$

6. Oldjuk meg a következő parabolikus vegyes feladatot!

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) - \partial_x^2 u(t, x) = te^t \sin(x) & ((t, x) \in \mathbb{R}^+ \times (0, \pi)), \\ u(0, x) = \sin(x) - 4 \sin(2x) & (x \in [0, \pi]), \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & (t \in \mathbb{R}_0^+). \end{cases}$$

7. Legyen $a > 0$, és határozzuk meg a következő operátor sajátértékeit és sajátfüggvényeit!

$$D(L) := \{u \in C^2(0, a) \cap C^1([0, a]) : u'(0) = 0, u(a) = 0\}, \quad Lu := -u'' + 2u.$$

$$\frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} g(x - 2\sqrt{t}\eta) d\eta + \int_0^t \frac{1}{(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} f(\tau, x - 2\sqrt{t-\tau}\eta) d\eta d\tau$$

$$\frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} f(\tau, \xi) d\xi d\tau + \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(\xi) d\xi$$