1. zh (B) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_y^2 u(x,y) - 2\partial_y u(x,y) = 5, \\ u(x,0) = 0, \\ u(x,x) = 1. \end{cases}$$

2. Adjuk meg az összes olyan $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényt, melyre $\Delta u = 0$ és $\Delta(u^2) = 0$!

3. Adjuk meg a $2y\partial_x u(x,y) + x^3\partial_y u(x,y) = x^3 y u(x,y)$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az $x^2 = y$ egyenletű görbe mentén azonosan 1.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y + x^2 = 3$ és $y = -2$ egyenletű görbék közötti tartományban elliptikus, azon kívül hiperbolikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = e^{-j^2}\varphi(x-j)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Értelmezzük az $u \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^{+\infty} (3y+2)\varphi(0,y)\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Számítsuk ki a $\partial_2^2 u$ disztribúciót!

7. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, és definiáljuk az u_f disztribúciót az $u_f(\varphi) := u(f\varphi)$ hozzárendeléssel, ahol $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Mutassuk meg, hogy $\partial_k(u_f) = f\partial_k u + u_{\partial_k f}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ teljesül!

1. zh (B) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!

$$\begin{cases} \partial_y^2 u(x,y) - 2\partial_y u(x,y) = 5, \\ u(x,0) = 0, \\ u(x,x) = 1. \end{cases}$$

2. Adjuk meg az összes olyan $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ függvényt, melyre $\Delta u = 0$ és $\Delta(u^2) = 0$!

3. Adjuk meg a $2y\partial_x u(x,y) + x^3\partial_y u(x,y) = x^3 y u(x,y)$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az $x^2 = y$ egyenletű görbe mentén azonosan 1.

4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y + x^2 = 3$ és $y = -2$ egyenletű görbék közötti tartományban elliptikus, azon kívül hiperbolikus legyen.

5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = e^{-j^2}\varphi(x-j)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!

6. Értelmezzük az $u \colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:

$$u(\varphi) := \int_0^{+\infty} (3y+2)\varphi(0,y)\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$

Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Számítsuk ki a $\partial_2^2 u$ disztribúciót!

7. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, és definiáljuk az u_f disztribúciót az $u_f(\varphi) := u(f\varphi)$ hozzárendeléssel, ahol $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$. Mutassuk meg, hogy $\partial_k(u_f) = f\partial_k u + u_{\partial_k f}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ teljesül!