1. zh (A) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!
$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x,y) + 2\partial_x u(x,y) = 4y, \\ u(0,y) = 1, \\ u(y,y) = 0. \end{cases}$$
2. Adjunk meg olyan legalább másodfokú kétváltozós p polinomot, melyre $\Delta p = 0$ és amely azonosan 0
   a) a koordinátatengelyeken;
   b) legalább négy különböző origón átmenő egyenesen.
3. Adjuk meg a $4y^3\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = xy^3 u(x,y)$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az $x = y^2$ egyenletű görbe mentén azonosan 1.
4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y+2 = x^2$ és $y = 3$ egyenletű görbék közötti tartományban elliptikus, azon kívül hiperbolikus legyen.
5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = \frac{1}{j}\varphi(e^j x)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!
6. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:
$$u(\varphi) := \int_0^{+\infty} (2x+3)\varphi(x,0)\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$
   Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Számítsuk ki a $\partial_1^2 u$ disztribúciót!
7. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, és definiáljuk az u_f funkcionált az $u_f(\varphi) := u(f\varphi)$ hozzárendeléssel, ahol $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$!

1. zh (A) feladatsor
III. éves alkmat parcdiff 2018. tavasz

1. Keressük meg az alábbi Cauchy-feladat $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ megoldását!
$$\begin{cases} \partial_x^2 u(x,y) + 2\partial_x u(x,y) = 4y, \\ u(0,y) = 1, \\ u(y,y) = 0. \end{cases}$$
2. Adjunk meg olyan legalább másodfokú kétváltozós p polinomot, melyre $\Delta p = 0$ és amely azonosan 0
   a) a koordinátatengelyeken;
   b) legalább négy különböző origón átmenő egyenesen.
3. Adjuk meg a $4y^3\partial_x u(x,y) + x\partial_y u(x,y) = xy^3 u(x,y)$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ megoldását, amely az $x = y^2$ egyenletű görbe mentén azonosan 1.
4. Adjunk meg a, b, c nemkonstans kétváltozós polinomokat úgy, hogy az $Lu = a(x,y)\partial_x^2 u + b(x,y)\partial_{xy} u + c(x,y)\partial_y^2 u$ másodrendű differenciáloperátor az $y+2 = x^2$ és $y = 3$ egyenletű görbék közötti tartományban elliptikus, azon kívül hiperbolikus legyen.
5. Rögzített $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ függvény mellett legyen $\varphi_j(x) = \frac{1}{j}\varphi(e^j x)$ $(x \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots)$. Konvergens-e a (φ_j) függvénysorozat a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$ térben? Ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát!
6. Értelmezzük az $u\colon \mathscr{D}(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ funkcionált a következőképpen:
$$u(\varphi) := \int_0^{+\infty} (2x+3)\varphi(x,0)\,dx \quad (\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)).$$
   Igazoljuk, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$! Számítsuk ki a $\partial_1^2 u$ disztribúciót!
7. Legyen $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, és definiáljuk az u_f funkcionált az $u_f(\varphi) := u(f\varphi)$ hozzárendeléssel, ahol $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$!