Analízis 2. gyakorlatok

Programtervező informatikus szak
A, B és C szakirány

2018–2019. őszi félév

$\boxed{\text{1. gyakorlat}}$

Függvények határértéke 1.

■ Feladatok

1. A definíció alapján határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{1+x}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

M. **Kritikus határértékek vizsgálata.** Függvények határértékének a meghatározásánál „szerencsés esetekben" alkalmazhatjuk a határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó (igen általános!) tételünket. Ezek az eredmények akkor használhatók, ha a tételben szereplő $\overline{\mathbb{R}}$-beli $A+B, AB, A/B$ műveletek értelmezve vannak. Ha valamelyik művelet nincs értelmezve, akkor a megfelelő függvények határértékéről általában semmit sem mondhatunk. Ezeket a **kritikus határértékeket** röviden a

$$(+\infty)+(-\infty), \qquad 0\cdot(\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \qquad \frac{0}{0}$$

szimbólumokkal szoktuk jelölni. Ilyen esetekben a sorozatoknál már megismert „módszert" követhetjük: a kritikus határértéket „valamilyen módon" (alkalmas azonosságok felhasználásával) megpróbáljuk nem kritikus határértékké átalakítani.

2. **Polinom határértéke.** Legyen $p(x) := \alpha_0+\alpha_1 x+\cdots+\alpha_n x^n$ $(x\in\mathbb{R})$ *polinom*, ahol $\alpha_0,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ és $\alpha_n\neq 0$. Mutassa meg, hogy

(a) minden $a\in\mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to a} p(x) = p(a)$,

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} p(x) = \operatorname{sign}(\alpha_n)(+\infty)$,

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} p(x) = (-1)^n \operatorname{sign}(\alpha_n)(+\infty)$.

M. A (b) és (c) állítások tehát azt jelentik, hogy polinomok „viselkedését" a plusz/mínusz végtelen környezetében a polinom főtagja (az $\alpha_n x^n$ tag, illetve még pontosabban az α_n főegyüttható előjele és n paritása) határozza meg, azaz polinom határértéke a $\pm$ végtelenben megegyezik a főtag $\pm$ végtelenben vett határértékével.

3. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^m-1}$ $\qquad (m,n=1,2,\ldots)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$, (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-7x^2+5x-1}$,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+2x^2+11x+2}{x^2+3x+2}$, (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3+3x^2+23}{-3x^3-5x^2+31x+1}$.

4. A „gyöktelenítés technikájával” határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ $(n=2,3,\ldots)$.

■ Házi feladatok

1. A definíció alapján határozza meg az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt{2x+5}$, (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

2. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$, (b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

■ Gyakorló feladatok

1. A definíció alapján lássa be, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x^n}$, ha $n=1,2,3,\ldots$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^n} \begin{cases} \nexists, & \text{ha } n=1,3,5,\ldots \\ =+\infty & \text{ha } n=2,4,6,\ldots\ . \end{cases}$

2. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^3-1}\right)$,

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{n}{1-x^n}-\dfrac{m}{1-x^m}\right)$ $(m,n=1,2,\ldots)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\dfrac{1}{x}\right]$, ahol $[x]$ az $x\in\mathbb{R}$ egész részét jelöli,

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\big(\sqrt{x^2+1}-x\big)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ $(m,n=2,3,\ldots)$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1}$,

3. **Racionális törtfüggvények határértéke.** Legyen p és q polinom, $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Vizsgáljuk a következő határértéket:

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}.$$

A lehetséges esetek: $a=\pm\infty$, $a\in\mathbb{R}$; $q(a)\neq 0$, $q(a)=0$; egyoldali határértékek.

4. Milyen $a, b \in \mathbb{R}$ mellett igaz az, hogy $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b) \right) = 0$?

5. Vizsgálja meg, hogy az alábbi függvényeknek az értelmezési tartományuk melyik torlódási pontjában van határértéke:

(a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \{x\}$, ahol $\{x\} := x - [x]$ az x valós szám tört része,

(b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - \{x\}$,

(c) $f(x) := \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

(d) $f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$

(e) **Riemann-függvény:**

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, (p, q) = 1, q \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{Z} \\ 1, & \text{ha } x = 0 \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(itt (p, q) jelöli a p és q számok legnagyobb közös osztóját).

2. gyakorlat

Függvények határértéke 2. Folytonosság. Elemi függvények

Szükséges ismeretek

- Adott $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$, $A \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén mi a definíciója a $\lim_a f = A$ egyenlőségnek?
- Adja meg egyenlőtlenségek segítségével a *plusz végtelenben vett véges* határérték definícióját.
- Mit tud mondani a hatványsor összegfüggvényének a határértékéről?
- Definiálja függvény jobb oldali határértékét.
- Definiálja az exp függvényt.
- Definiálja az sin függvényt.
- Definiálja az cos függvényt.
- Definiálja egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény pontbeli folytonosságát.
- Definiálja a *megszüntethető szakadási hely* fogalmát.
- Definiálja az *elsőfajú szakadási hely* fogalmát.

Feladatok

1. A hatványsor összegfüggvényének a határértékére vonatkozó tétel alapján lássa be, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. A $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ felhasználásával számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

3. A hatványsorokra vonatkozó ismeretek alkalmazásával határozza meg a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x$,

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

4. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban és $f(a) > 0$. Mutassa meg, hogy ekkor az a pontnak létezik olyan környezete, amelyben f csak pozitív értéket vesz fel.

5. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 5\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 2 \\ 0, & \text{ha } x = 5 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

6. Bizonyítsa be, hogy minden páratlan fokszámú, valós együtthatós polinomnak van legalább egy valós gyöke.

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az következő határértékeket:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{x}$.

2. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\} \\ 0, & \text{ha } x = -1 \\ \alpha, & \text{ha } x = 2 \end{cases}$$

függvény folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusait.

■ Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsa be a következő azonosságokat: bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$,

(b) $\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$,

(c) $\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$.

2. Az f valós-valós függvény $a \in \mathcal{D}_f$ pontbeli folytonossága ekvivalens-e a következővel

$$\exists\, \delta \in \mathbb{R}^+, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \text{ és } \forall\, x \in \mathcal{D}_f,\ |x - a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - f(a)| < \varepsilon?$$

3. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg az alábbi függvények folytonossági, illetve szakadási helyeit, valamint a szakadási helyek típusát:

(a) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{x - 7}{|x - 7|}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{7\} \\ \alpha, & \text{ha } x = 7; \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 1, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

4. Igazolja, hogy az

$$x^2 = \sqrt{x+1}$$

egyenletnek van legalább egy megoldása az $(1, 2)$ intervallumban.

5. Igazolja, hogy az

$$\ln x = e^x - 3$$

egyenletnek van legalább egy megoldása az $(1, 2)$ intervallumban.

6. Legyen f és g valós-valós függvény.

(a) Lehet-e az $f+g, fg, f/g$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban, ha az f és a g függvénynek az a pont szakadási helye?

(b) Tegyük fel, hogy az f függvény folytonos, a g függvénynek pedig szakadása van az $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$ pontban. Lehet-e az $f+g, fg, f/g$ függvény folytonos a-ban?

7. Egy tibeti szerzetes egy nap reggel 7-kor elindul a kolostorból a szokott ösvényen a hegy tetején lévő szentélybe, ahova este 7-kor meg is érkezik. Másnap reggel 7-kor visszaindul ugyanazon az ösvényen a kolostorba, és este 7-kor visszaérkezik. Bizonyítsa be, hogy van olyan pont az ösvényen, amelyiken mindkét nap ugyanabban az időben haladt át.

8. Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény határértéke mind $+\infty$-ben, mind pedig $-\infty$-ben $+\infty$. Igazolja, hogy ekkor f-nek létezik abszolút minimuma.

9. Igazolja, hogy az $f(x) := (1 + x^2) \operatorname{sign} x \ (x \in \mathbb{R})$ szakadásos függvénynek az inverze folytonos.

10. Mutassa meg, hogy a *Riemann-függvény* (l. az 5. oldalt) az irracionális pontokban folytonos, de a racionális helyeken szakadása van.

3. gyakorlat

A derivált definíciója. Deriválási szabályok

■ Szükséges ismeretek

- Mi a *belső pont* definíciója?
- Mikor mondja azt, hogy egy $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható valamely pontban?
- Mi a kapcsolat a pontbeli differenciálhatóság és a folytonosság között?
- Milyen ekvivalens átfogalmazást ismer a pontbeli deriválhatóságra a lineáris közelítéssel?
- Milyen tételt ismer két függvény szorzatának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen tételt ismer két függvény hányadosának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen tételt ismer két függvény kompozíciójának valamely pontbeli differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?

A továbbiakban gyakran alkalmazott megállapodásunk: Ha egy feladatban szereplő függvény értelmezési tartományát nem tüntettük fel, akkor azokban az esetekben mindig olyan valós-valós függvényről van szó, amelynek az értelmezési tartománya $\mathbb{R}$-nek az a legbővebb részhalmaza, amelyen a megadott kifejezésnek értelme van.

■ Feladatok

1. A definíció alapján mutassa meg, hogy

(a) minden $n = 1, 2, \ldots$ természetes számra $\big(x^n\big)' = n\,x^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$.

2. Trigonometrikus azonosságok és a $\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ határérték felhasználásával a definíció alapján mutassa meg, hogy a sin függvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható és

$$\sin' x = (\sin x)' = \cos x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := x^3 + \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{5x^5}$, (b) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$,

(c) $f(x) := x^2 \sin x$, (d) $f(x) := \dfrac{x^2+3}{x^2-x-2}$.

4. Az összetett függvény deriválási szabályát felhasználva határozza meg $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := (5x^2+3x)^{2018}$, (b) $f(x) := \sin\dfrac{x^2+1}{x+3}$,

(c) $f(x) := \sqrt{x^3+2x+1}$, (d) $f(x) := \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

5. Hol deriválható az

$$f(x) := \frac{1}{|x|+1} \quad (x\in\mathbb{R})$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat.

■ Házi feladatok

1. A definíció alapján mutassa meg, hogy

$$\big(\sqrt{x}\big)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \big(x\in(0,+\infty)\big).$$

2. Trigonometrikus azonosságok és a $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ határérték felhasználásával a definíció alapján mutassa meg, hogy a cos függvény minden $x\in\mathbb{R}$ pontban deriválható és

$$\cos' x = (\cos x)' = -\sin x \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

3. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := \dfrac{2x^2-1}{x\sqrt{1+x^2}}$, (b) $f(x) := \dfrac{e^x}{1+e^x}$,

(c) $f(x) := 3^{x^2}$, (d) $f(x) := \dfrac{1}{x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := \sin\sqrt{1+x^3}$, (b) $f(x) := \dfrac{(x+1)^3}{x^{3/2}}$,

(c) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$, (d) $f(x) := \dfrac{\sin(2x^2)}{3-\cos(2x)}$.

2. Hol deriválhatók az alábbi függvények? Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat.

(a) $f(x) := |3x-1|$, $(x\in\mathbb{R})$, (b) $f(x) := e^{|x|}$ $(x\in\mathbb{R})$,

(c) $f(x) := x^2(\operatorname{sign} x + \operatorname{sign}|x-1|)$ $(x\in\mathbb{R})$.

3. Tegyük fel, hogy a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható. Fejezze ki az f függvény deriváltját g segítségével, ha:

(a) $f(x) := x^2 g(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := g(x^2) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := g^2(x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := g(g(x)) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(e) $f(x) := g(e^x) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := e^{g(x)} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(g) $f(x) := g(\ln x) \quad (x > 0)$,

(h) $f(x) := \ln |g(x)| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid g(y) = 0\})$.

4. Legyenek $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ differenciálható függvények. Fejezze ki h'-t f és g segítségével, ha

(a) $h(x) := \sqrt{\dfrac{f(x)}{g(x)}} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $h(x) := f(g(\sin x)) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $h(x) := \log_{f(x)}\big(g(x)\big) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{y \mid f(y) = 1\})$.

$\boxed{\text{4. gyakorlat}}$

A deriválás technikája. Érintő

■ Szükséges ismeretek

- Mit jelent az, hogy egy függvény *jobbról deriválható* egy pontban?
- Milyen tételt tanult az inverz függvény differenciálhatóságáról és a deriváltjáról?
- Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és a deriváltjáról?
- Definiálja az exp függvényt.
- Értelmezze az ln függvényt.
- Mi az érintő definíciója?

■ Feladatok

1. A logaritmusazonosságok alkalmazása után számítsa ki az

$$f(x) := \ln \frac{\sqrt{1+x}}{(x^2+1)^5} \qquad (x > -1)$$

függvény deriváltját.

Írja fel a függvény grafikonjának az $x_0 := 0$ abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.

2. Határozza meg $f'(x)$-et, ha

$$f(x) := (\ln x)^x \quad (x > 1).$$

3. Legyen α valós paraméter. Hol deriválható az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + x^2, & x < 0 \\ x - x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

függvény? Ahol differenciálható, ott számítsa ki a deriváltat.

4. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[4]{16+h} - 2}{h}$$

határértéket.

■ Házi feladatok

1. Írja fel az f függvény grafikonjának az a abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét, ha

$$f(x) := \sin \frac{x-1}{x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad a = \frac{1}{2}.$$

2. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

$$f(x) := (2 + \sin x)^{\cos x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

(a) $f(x) := \ln(\sin x) - \frac{1}{2}\sin^2 x$,

(b) $f(x) := \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$,

(c) $f(x) := \ln\big(e^{-x}\sin x\big)$,

(d) $f(x) := \sqrt{1+\sin^2 x} \cdot \cos x$,

(e) $f(x) := e^x \sin x$,

(f) $f(x) := x^2 \sqrt[3]{x}$,

(g) $f(x) := (x+2)^8(x+3)^6$,

(h) $f(x) := \big(\sin^3 x\big) \cdot \cos x$,

(i) $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$,

(j) $f(x) := \dfrac{\sin 2x^2}{3-\cos 2x}$,

(k) $f(x) := \ln(x^2 e^x)$,

(l) $f(x) := e^{\cos x} + \cos(e^x)$,

(m) $f(x) := \left(x + \frac{1}{x^2}\right)^{\sqrt{7}}$,

(n) $f(x) := \ln\big(\cos x\big)$,

(o) $f(x) := \sqrt[5]{x \operatorname{ch} x}$,

(p) $f(x) := \sin^2\big(\ln(\sqrt{1+\cos^2 x}+1)\big)$.

2. Számítsa ki $f'(x)$-et, ha

$$f(x) := (1 + e^{3x+1})^{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

3. Hol deriválhatók az alábbi függvények? (a, b és c valós paraméterek.) Ahol differenciálhatók, ott számítsa ki a deriváltat.

(a) $f(x) := \begin{cases} 1 - ax, & x < 0 \\ e^{-x^2}, & x \geq 0, \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & x \in \mathbb{Q}^*, \end{cases}$

(c) $f(x) := \begin{cases} ax^2 + bx + c, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0. \end{cases}$

4. Alkalmas függvény differenciálhatóságának a definíciójára gondolva számítsa ki a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$$

határértéket.

5. Tegyük fel, hogy az f és a g valós-valós függvények, továbbá $a \in \operatorname{int}\big(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g\big)$. Mit lehet mondani az $f+g$, illetve az $f \cdot g$ függvény a-beli deriválhatóságáról, ha

(a) f differenciálható a-ban és g nem differenciálható a-ban;

(b) f és g egyike sem differenciálható az a pontban?

6. Adjon meg olyan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket és olyan $a \in \mathbb{R}$ pontot, amelyekre

(a) $g \in D\{a\}$ és $f \notin D\{g(a)\}$

(b) $g \notin D\{a\}$ és $f \in D\{g(a)\}$

(c) $g \notin D\{a\}$ és $f \notin D\{g(a)\}$

teljesül, azonban $f \circ g \in D\{a\}$.

$\boxed{\text{5. gyakorlat}}$

Monotonitás. Szélsőértékek

■ Szükséges ismeretek

- Milyen *elégséges* feltételeket ismer differenciálható függvény *monotonitásaival* kapcsolatban?
- Milyen *szükséges és elégséges* feltételeket ismer differenciálható függvény *monotonitásaival* kapcsolatban?
- Mit ért azon, hogy az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek valamely helyen *lokális maximuma* van?
- Hogyan szól a lokális szélsőértékre vonatkozó *elsőrendű szükséges* feltétel?
- Hogyan szól a *lokális szélsőértékekre* vonatkozó *elsőrendű elégséges* feltétel?
- Írja le a *lokális maximumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.
- Hogyan szól a *Weierstrass-tétel*?

■ Feladatok

1. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) := x^2(x-3)\ (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x}{x^2 - 6x - 16}\ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 8\})$,

(c) $f(x) := x \ln x\ \ (x \in (0, +\infty))$,

(d) $f(x) := \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{1+x}\ \ (x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ x \neq -1)$.

2. Határozza meg az f függvény

(a) a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékeit az $A \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, ha

(ii) $f(x) := x^4 - 4x^3 + 10\ \ (x \in \mathbb{R})$, és $A = [-1, 4]$;

(iii) $f(x) := \dfrac{x}{x^2+1}\ (x \in \mathbb{R})$, és $A = \left[-\frac{3}{2}, 2\right]$;

(iv) $f(x) := 2x + \dfrac{200}{x}\ \ (0 < x < +\infty)$, és $A = \mathcal{D}_f$.

■ Házi feladatok

1. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az

$$f(x) := \frac{e^x}{x}\ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvényt.

2. Határozza meg az
$$f(x) := \frac{x}{x^2+x+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$
függvénynek

(a) a lokális szélsőértékeit,

(b) az abszolút szélsőértékeit a $[-2, 0]$ halmazon.

■ Gyakorló feladatok

1. Mutassa meg, hogy ha az $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ függvény szigorúan monoton csökkenő (szigorúan monoton növekedő), akkor az inverze is szigorúan monoton csökkenő (szigorúan monoton növekedő).

2. Mutassa meg, hogy ha $f \in D$ és f páros (páratlan), akkor f' páratlan (páros).

3. Milyen $p \in \mathbb{R}$ esetén van az $x^3 - 6x^2 + 9x + p = 0$ egyenletnek pontosan egy valós gyöke?

4. Vizsgálja meg monotonitás szempontjából az alábbi függvényeket:

(a) $f(x) := 2e^{x^2-4x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := xe^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := xe^{-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := \ln \dfrac{x^2}{(1+x)^3}$ $(x > -1,\ x \neq 0)$,

(e) $f(x) := (x-3)\sqrt{x}$ $(x \in [0, +\infty))$.

5. Határozza meg az f függvény lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit, ha

(a) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ $(x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := x^2e^{-x}$ $(x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := x - \ln(1+x)$ $(x \in (-1, +\infty))$.

6. Számítsa ki az f függvény abszolút szélsőértékeit, ha

(a) $f(x) := 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ $(x \in [-3, 3])$,

(b) $f(x) := x^2e^{-x}$ $\qquad (x \in \mathbb{R})$.

7. Egységnyi kerületű téglalapok közül melyiknek legnagyobb, illetve legkisebb a területe?

8. A $6x + y = 9$ egyenletű egyenesen keressük meg a $(-3, 1)$-hez legközelebbi pontot.

9. Az $y^2 - x^2 = 4$ egyenletű hiperbolának mely pontja van legközelebb a $(2, 0)$ pothoz?

10. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a $(3, 5)$ ponton és az első síknegyedből a legkisebb területű részt vágja le.

11. Legfeljebb mekkora lehet annak a gerendának a hossza, amelyet egy 4 m átmérőjű, kör keresztmetszetű toronyba, egy a torony falán vágott 2 m magas ajtón át bevihetünk?

6. gyakorlat

Differenciálható függvények vizsgálata

Szükséges ismeretek

- Mondja ki a *Lagrange-féle középértéktételt.*
- Fogalmazza meg a deriváltak egyenlőségére vonatkozó állításokat.
- Milyen *elégséges* feltételeket ismer differenciálható függvény *monotonitásaival* kapcsolatban?
- Mi a konvex függvény definíciója?
- Milyen ekvivalens definíciót ismer a konvexitásra?
- Jellemezze egy függvény *konvexitását* a második deriváltfüggvény segítségével.
- Értelmezze az arc tg függvényt.

Feladatok

1. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in D(\mathbb{R})$ és $f' = f$. Bizonyítsa be, hogy van olyan $c \in \mathbb{R}$ szám, hogy
$$f(x) = ce^x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

2. Mutassa meg, hogy
$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) < x \quad \big(x \in (0, +\infty)\big).$$

3. Vizsgálja meg konvexitás és konkávitás szempontjából a következő függvényeket:

(a) exp,

(b) ln,

(c) $f(x) := x^\alpha \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) := 2x^3 - 21x^2 + 36x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \ln\big(x^2 + 2x + 2\big) \quad (x \in \mathbb{R})$.

5. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket:
$$\operatorname{arc\,sin} \tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{arc\,cos}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \operatorname{arc\,tg} 1, \quad \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{3}.$$

6. A $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy
$$\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$
Milyen kapcsolat van az arc sin és az arc cos függvények garfikonjai között?

■ Házi feladatok

1. Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken

$$f(x) := e^{2x} - (4x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

■ Gyakorló feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy pontosan egy olyan $x \in \mathbb{R}$ szám létezik, amelyre $e^x = 1+x$.

2. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $1 + x < e^x \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$,

(b) $\dfrac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x \quad (x \in \mathbb{R}^+)$,

(c) $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{x}{2} \quad (x \in \mathbb{R}^+)$,

(d) $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$.

3. Adja meg azokat a legbővebb intervallumokat, amelyeken f konvex, illetve konkáv. Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

(a) $f(x) := e^{2x} - (4x+1) \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := 1 - (x+1)^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := x^5 - 5x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(d) $f(x) := x + \sin x \quad (x \in \mathbb{R})$.

(e) $f(x) := \dfrac{x^3}{3x^2+1} \quad (x \in \mathbb{R})$,

(f) $f(x) := x\sqrt{8-x^2} \quad (|x| \le 2\sqrt{2})$.

4. A $\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $\big(y \in (0,\pi)\big)$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big).$$

Milyen kapcsolat van az $\operatorname{arc\,tg}$ és az $\operatorname{arc\,ctg}$ függvények garfikonjai között?

$\boxed{\text{7. gyakorlat}}$

Függvényvizsgálat

■ Feladatok

1. A $\sin y = \sin(\pi - y)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával mutassa meg, hogy

$$\operatorname{arc\,sin}(\sin x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & \text{ha } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases},$$

$$\operatorname{arc\,sin}(\sin(x + 2k\pi)) = \arcsin(\sin x) \quad (x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}).$$

Ennek felhasználásával ábrázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arc\,sin}(\sin x)$$

függvény grafikonját.

2. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := x^3 + x, \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, $f^{-1} \in D$, és számítsa ki $\big(f^{-1}\big)'(2)$-t.

3. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := x + e^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény invertálható, $f^{-1} \in D^2$, és számítsa ki $\big(f^{-1}\big)''(1)$-et.

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg.

(a) $f(x) := x^4 + x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$,

(b) $f(x) := \dfrac{x^2}{(x-1)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$.

■ Házi feladatok

■ Gyakorló feladatok

1. Az $\operatorname{arc\,cos}(\cos x)$ alkalmas átalakításával vázolja az

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \operatorname{arc\,cos}(\cos x)$$

függvény képét.

2. Mutassa meg, hogy az f függvény invertálható, és határozza meg az inverzét:

(a) $f(x) := \pi - \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1} \quad \big(x \in \big[\frac{1}{2}, 1\big]\big),$

(b) $f(x) := \operatorname{tg}\Big(\dfrac{\operatorname{arc\,sin}\,(2x-5)}{3}\Big) \quad (x \in [2, 3]).$

3. Van-e az

$$f(x) := \frac{x^2+9}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvénynek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg.

4. Van-e az f függvénynek aszimptotája $(+\infty)$-ben, illetve $(-\infty)$-ben? Ha igen, akkor határozza meg.

(a) $f(x) := x \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$

(b) $f(x) := \sqrt{x^2 - x + 1} \quad (x \in \mathbb{R}).$

5. Mutassa meg, hogy

$$\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

6. Bizonyítsa be, hogy

$$\begin{aligned} \cos(\operatorname{arc\,sin} x) &= \sqrt{1-x^2} \qquad (x \in [-1, 1]), \\ \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,sin} x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x \in (-1, 1)\big). \end{aligned}$$

7. Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} = \begin{cases} \pi - 2 \operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } x > 1 \\ 2 \operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } -1 \le x \le 1 \\ -\pi - 2 \operatorname{arc\,tg}\, x, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

8. gyakorlat

Elemi függvények. L'Hospital-szabályok

■ Szükséges ismeretek

- Definiálja a *periodikus* függvényt.
- Definiálja a π számot.
- Mit tud mondani a sin és a cos függvények periodicitásáról?
- Értelmezze az $\operatorname{arc\,sin}$ függvényt.
- Értelmezze az $\operatorname{arc\,cos}$ függvényt.
- Értelmezze az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényt.
- Értelmezze az $\operatorname{arc\,ctg}$ függvényt.
- Milyen állítást ismer a $(+\infty)$-beli aszimptota meghatározására?
- Írja le a $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó *L'Hospital-szabályt.*

■ Feladatok

• Elemi függvények

1. Számítsa ki az alábbi függvényértékeket:

$$\operatorname{arc\,sin}\tfrac{1}{2}, \quad \operatorname{arc\,cos}\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \operatorname{arc\,tg}1, \quad \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}.$$

2. A $\sin y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $(y \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc\,sin}x + \operatorname{arc\,cos}x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in [-1, 1]\big).$$

Milyen kapcsolat van az $\operatorname{arc\,sin}$ és az $\operatorname{arc\,cos}$ függvények garfikonjai között?

• L'Hospital-szabályok

3. Mutassa meg, hogy

(a) ha $a \in (1, +\infty)$ és $n \in \mathbb{N}$, akkor $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$

(azaz: $x \to +\infty$ esetén az a^x függvény gyorsabban tart végtelenhez, mint x bármely pozitív egész kitevőjű hatványa);

(b) ha $n, m \in \mathbb{N}^+$, akkor $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^n x}{x^m} = 0$

(azaz: $x \to +\infty$ esetén x bármely pozitív egész kitevőjű hatványa gyorsabban tart végtelenhez, mint $\ln x$ bármely pozitív egész kitevőjű hatványa).

4. A L'Hospital-szabály alkalmazásával számítsa ki az alábbi határértékeket. (Minden egyes esetben állapítsa meg, hogy milyen típusú kritikus határértékről van szó.)

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0+0} x^x$, (f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$.

5. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály nem alkalmazható, és számítsa ki a keresett határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\operatorname{ch}(x+3)}{\operatorname{ch}(x-3)}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\operatorname{tg} x}$.

A (b) feladatban figyeljük meg, hogy a L'Hospital-szabály azért nem alkalmazható, mert a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték nem létezik, pedig $\lim\limits_{0} = f \lim\limits_{0} g = 0$, ugyanakkor a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ határérték létezik.

■ Házi feladatok

1. A $\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$ $\big(y \in (0, \pi)\big)$ azonosság felhasználásával bizonyítsa be, hogy

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2} \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big).$$

Milyen kapcsolat van az arc tg és az arc ctg függvények garfikonjai között?

2. Számítsa ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin x \cdot \ln x$, (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{x-x^2} \cdot \ln(x^2 - x + 1)$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x} - \dfrac{1}{x}\right)$, (d) $\lim\limits_{x\to 0+0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}$ $(a > 0)$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$, (d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$,

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{1/x} - x$, (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^2 e^{-x}$,

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$, (h) $\lim\limits_{x\to 0+0} (-\ln x)^x$.

2. Mutassa meg, hogy az alábbi esetekben a L'Hospital-szabály nem alkalmazható, és számítsa ki a keresett határértékeket:

(a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$,

(b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$.

9. gyakorlat

Teljes függvényvizsgálat

■ Szükséges ismeretek

- Milyen *szükséges és elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *monoton növekedésével* kapcsolatban?
- Milyen *elégséges* feltételt ismer differenciálható függvény *szigorú monoton növekedésével* kapcsolatban?
- Írja le a *lokális minimumra* vonatkozó *másodrendű elégséges* feltételt.
- Mi a *konvex* függvény definíciója?
- Milyen ekvivalens definíciót ismer a konvexitásra?
- Jellemezze egy függvény *konvexitását* a második derivált segítségével.
- Milyen állítást ismer a $(+\infty)$-beli aszimptota meghatározására?

■ Feladatok

1. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x^4 - 4x^3 + 10 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

2. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját (az ún. *Gauss-görbe*).

3. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{x^3 + x}{x^2 - 1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$$

függvény grafikonját.

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x^x \qquad (x \in (0, +\infty))$$

függvény grafikonját.

■ Házi feladatok

1. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \left(\frac{x + 2}{x - 3}\right)^2 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{3\})$$

függvény grafikonját.

2. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \ln\big(x^2 + 2x + 2\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

■ Gyakorló feladatok

1. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x + 2 - \frac{4x}{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

2. Teljes függvényvizsgálat elvégzése után vázolja az

$$f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$$

függvény grafikonját.

3. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := \frac{e^x}{1+e^x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

4. Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az

$$f(x) := x - \operatorname{arctg}(2x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

5. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken, és vázolja a grafikonjukat:

(a) $f(x) := 2 - 2x^2 - x^3 \qquad (x \in \mathbb{R}),$

(b) $f(x) := 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2 \qquad (x \in \mathbb{R}),$

(c) $f(x) := \dfrac{1}{x(x-3)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}),$

(d) $f(x) := \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}),$

(e) $f(x) := \dfrac{x^2+9}{x} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$

(f) $f(x) := \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}),$

(g) $f(x) := x + \sqrt{1-x} \qquad (x \le 1),$

(h) $f(x) := \sqrt{x^2 - x + 1}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$,

(i) $f(x) := x\sqrt{2 + x}$ $\quad (x \geq -2)$,

(j) $f(x) := x\sqrt{8 - x^2}$ $\quad (|x| \leq 2\sqrt{2})$,

(k) $f(x) := \sin^2 x - 2\cos x$ $\quad (x \in \mathbb{R})$,

(l) $f(x) := e^{2x - x^2}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$,

(m) $f(x) := \dfrac{1 + x^2}{e^{x^2}}$ $\quad (x \in \mathbb{R})$,

(n) $f(x) := \ln(x^2 - 1)$ $\quad (|x| > 1)$,

(o) $f(x) := \dfrac{\ln x}{x}$ $\quad (x > 0)$,

(p) $f(x) := x \ln |x| \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$,

(q) $f(x) := \begin{cases} x^4\bigl(2 + \sin \frac{1}{x}\bigr), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & \text{ha } x = 0. \end{cases}$

10. gyakorlat

Taylor-polinomok és Taylor-sorok

Szükséges ismeretek

- Milyen állítást tud mondani hatványsor összegfüggvényének a deriválhatóságáról és a deriváltjáról?
- Mi a kapcsolat hatványsor összegfüggvénye és a hatványsor együtthatói között?
- Hogyan definiálja egy függvény *Taylor-sorát*?
- Mi a *Taylor-polinom* definíciója?
- Milyen állítást ismer az $\ln(1+x)$ hatványsor előállítására?
- Milyen állítást ismer a *binomiális sorra*?
- Fogalmazza meg a *Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal* néven tanult tételt.

Feladatok

1. Írja fel a $2x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ polinomot az $x + 1$ hatványai szerint. A feladat általánosításaként mutassa meg, hogy ha p egy legfeljebb n-edfokú polinom és $a \in \mathbb{R}$, akkor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

2. Számítsa ki az alábbi sor összegét a megadott intervallumon:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \qquad (-1 < x < 1).$$

3. Fejtse 0-körüli hatványsorba az $\operatorname{arc\,tg}$ függvényt egy alkalmas intervallumon.

4. Írja fel az f függvény $a = 0$ pont körüli n-edik Taylor-polinomját, $T_{n,a}(f,x)$-et. Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{n,a}(f,x)|$$

hibára az I intervallumon, ha

(a) $f(x) := \sqrt{1+x} \;\; (x \in (-1,+\infty)), \quad n = 2, \quad I = [0,1];$

(b) $f(x) := \operatorname{tg} x \;\; (|x| < \frac{\pi}{2}), \quad n = 3, \quad I = \left[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right].$

5. Határozza meg $\sqrt{2/5}$ egy közelítő értékét, és becsülje meg a közelítés hibáját.

Házi feladatok

1. Írja fel az

$$f(x) := \sqrt[3]{1+x} \qquad \big(x \in (-1,+\infty)\big)$$

függvény 0 pont körüli második Taylor-polinomját, $T_{2,0}(f,x)$-et. Adjon becslést az

$$|f(x) - T_{2,0}(f,x)|$$

hibára a $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ intervallumon.

Gyakorló feladatok

1. Írja fel az alábbi f függvények $a = 0$ pont körüli n-edik Taylor-polinomját, és határozza meg, hogy a megadott I intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt:

(a) $f := \sin, \quad n = 4, \ \ I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

(b) $f(x) := \ln(1+x) \ \ (x > -1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad I := [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$.

2. Számítsa ki ε-nál kisebb hibával az alábbi számokat a Taylor-formula felhasználásával:

(a) $e \quad (\varepsilon = 10^{-3})$,

(b) $\sin 1^o \quad (\varepsilon = 10^{-5})$,

(c) $\cos 9^o \quad (\varepsilon = 10^{-5})$,

(d) $\ln 1,2 \quad (\varepsilon = 10^{-3})$.

3. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

függvény végtelen sokszor deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon, és $f^{(n)}(0) = 0$ $(n \in \mathbb{N})$.

4. Adja meg a következő függvények 0 pont körüli Taylor-sorát:

(a) $f(x) := \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} \ \ (x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\})$,

(b) $f(x) := \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$,

(c) $f(x) := \dfrac{1}{(1-x)^2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$.

Milyen intervallumon állítja elő a Taylor-sor a függvényt?

11. gyakorlat

Primitív függvény, határozatlan integrál

■ Szükséges ismeretek

- Definiálja a primitív függvényt.
- Adjon meg olyan függvényt, amelyiknek *nincs* primitív függvénye.
- Mit jelent egy függvény határozatlan integrálja?
- Milyen állítást ismer a primitív függvények számával kapcsolatban?
- Mit mond ki a primitív függvényekkel kapcsolatos *parciális integrálás tétele*?
- Hogyan szól a primitív függvényekkel kapcsolatos *első helyettesítési szabály*?
- Fogalmazza meg a primitív függvényekkel kapcsolatos *második helyettesítési szabályt.*

■ Feladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények határozatlan integrálját:

(a) $f(x) := 6x^2 - 8x + 3 \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(b) $f(x) := \dfrac{x^2}{x^2+1} \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $f(x) := \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$.

2. Az első helyettesítési szabály alkalmazásával számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2+3}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(b) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos x\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x \cdot \ln x}\, dx \quad \big(x \in (0, +\infty)\big)$.

3. A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int (x^2 + 2x - 1)e^{-3x}\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(b) $\displaystyle\int e^{2x} \sin x\, dx \quad \big(x \in \mathbb{R}\big)$,

(c) $\displaystyle\int \ln x\, dx \quad \big(x > 0\big)$.

4. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx \quad \big(x\in(-1,1)\big)$$

határozatlan integrált

(a) parciális integrálással,

(b) az alábbi azonosság felhasználásával:

$$2\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \big(x\in(-1,1)\big).$$

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}\,dx \quad \big(x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx \quad \big(x\in(0,+\infty)\big),$

(c) $\displaystyle\int \cos(2x+1)\cdot e^{3x+2}\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big).$

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a követkeő határozatlan integrálokat:

(a) $\displaystyle f(x):=\frac{\cos^2 x-5}{1+\cos 2x}\,dx \quad \big(x\in\left(-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}\right)\big),$

(b) $\displaystyle\int \frac{8x+14}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+8)^5}}\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big),$

(c) $\displaystyle\int x\ln^2 x\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}^+\big),$

(d) $\displaystyle\int \frac{dc}{3x^2+12x+1}6 \quad \big(x\in\mathbb{R}\big).$

2. Számítsa ki az

$$\int \sqrt{1+x^2}\,dx \quad \big(x\in\mathbb{R}\big)$$

határozatlan integrált

(a) az $x=\operatorname{sh} t=g(t)$ $(t\in\mathbb{R})$ helyettesítéssel,

(b) parciális integrálással,

(c) az alábbi azonosság felhasználásával:

$$2\sqrt{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+\sqrt{1+x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}.$$

12. gyakorlat

Határozott integrál

Szükséges ismeretek

- Mi az alsó közelítő összeg definíciója?
- Mi a *Darboux-féle alsó integrál* definíciója?
- Mikor nevez egy függvényt (Riemann)-integrálhatónak?
- Adjon meg egy példát *nem integrálható* függvényre.
- Definiálja az $[a, b]$ intervallumon a primitív függvényt.
- Hogyan szól a *Newton–Leibniz-tétel?*

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{\sqrt{3}-2} \frac{dx}{x^2+4x+5}$,

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx$,

(d) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$ (alkalmazza az $x = \sqrt{e^x-1}$ helyettesítést),

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$,

(f) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\cdot\cos^2 x\,dx$.

2. Bizonyítsa be, hogy

$$\int_0^1 \operatorname{arc\,tg} x\,dx + \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$