Gyakorló feladatok

Analízis 1.
Programtervező informatikus szak
A, B, C szakirány

1. gyakorlat

Egyenlőtlenségek

Szükséges ismeretek (l. Matematikai alapozás)

- Teljes indukció.
- Kijelentések, kvantorok.

Feladatok

1. **A Bernoulli-egyenlőtlenség:** Minden $h \geq -1$ valós számra és minden $n = 1, 2, \ldots$ természetes számra

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Ezekre a h és n értékekre egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $h = 0$ vagy $n = 1$.

2. **A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség:** Legyen $n \geq 2$ tetszőleges természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszés szerinti *nemnegatív* valós számok. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

3. Mutassa meg, hogy minden $n = 1, 2, \ldots$ számra

(a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$,

(b) $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$.

Házi feladatok

1. Bizonyítsa be, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{n+1} - 2 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

2. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg a következő kijelentések tagadását, és döntse el, hogy az állítások és tagadásuk közül melyek igazak.

(a) $\exists\, y \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén $x < y^2$,

(b) $\exists\, y \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}^-$ esetén $x < y^2$,

(c) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ és $\exists\, y \in \mathbb{R}$, hogy $x^2 + y^2 = 1$.

■ Gyakorló feladatok

1. Mutassa meg, hogy

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \qquad (2 \leq n \in \mathbb{N}).$$

2. Igazolja, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok szorzata 1, akkor

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n.$$

Mikor van itt egyenlőség?

3. Mutassa meg, hogy minden pozitív a, b, c valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$8\,abc \leq (a+b)\cdot(b+c)\cdot(a+c) \leq \frac{8}{27}(a+b+c)^3.$$

4. Bizonyítsa be, hogy minden $a \geq -1/2$ valós számra fennáll az

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 1$$

egyenlőtlenség.

5. Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges pozitív valós számok, akkor

(a) $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_1} \geq n;$

(b) $a_1 a_2 \cdots a_n \leq \dfrac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n}.$

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

6. Bizonyítsa be, hogy

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots).$$

$\boxed{\text{2. gyakorlat}}$

Számhalmaz szuprémuma és infimuma

■ Szükséges definíciók és tételek

- Mit mond ki a *teljességi axióma*?
- Fogalmazza meg a szuprémum elvet.
- Mi a szuprémum definíciója?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \sup H \in \mathbb{R}$.
- Mi az infimum definíciója?
- Fogalmazza meg egyenlőtlenségekkel azt a tényt, hogy $\xi = \inf H \in \mathbb{R}$.
- Fogalmazza meg az Archimedes-tételt.
- Mit állít a Cantor-féle közösrész-tétel?

■ Feladatok

• Számhalmaz korlátossága, maximuma és minimuma

1. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy a nemüres $A \subset \mathbb{R}$ halmaz felülről *nem* korlátos.

2. Bizonyítsa be, hogy az $A := \left\{2 - \frac{1}{n} \ : \ n = 1, 2, \ldots\right\}$ halmaznak nincs maximuma.

• Számhalmaz szuprémuma és infimuma

3. Van-e az alábbi halmazoknak minimuma, illetve maximuma? Határozza meg a halmaz szuprémumát és infimumát.

(a) $[-1, 1]$, (b) $(-1, 1]$.

4. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

(a) $A := \left\{\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R} \ : \ 0 < x \leq 1\right\}$,

(b) $A := \left\{\dfrac{n+1}{2n+3} \in \mathbb{R} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$,

(c) $A := \left\{\dfrac{2|x|+3}{3|x|+1} \in \mathbb{R} \ : \ x \in [-2, +\infty)\right\}$,

(d) $A := \left\{\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \in \mathbb{R} \ : \ 0 \leq x \in \mathbb{R}\right\}$?

Határozza meg $\sup A$-t és $\inf A$-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ Házi feladatok

1. Van-e az alábbi halmazoknak minimuma, illetve maximuma? Határozza meg a halmaz szuprémumát és infimumát.

(a) $(-1,1]$, (b) $(-1,1)$.

2. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

(a) $A := \left\{\dfrac{1}{x^2} \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \le 1\right\}$,

(b) $A := \left\{\dfrac{2n+1}{3n+2} \in \mathbb{R} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(c) $A := \left\{\dfrac{5x+7}{2x+1} \in \mathbb{R} \,:\, x \in [0,+\infty)\right\}$,

Határozza meg $\sup A$-t és $\inf A$-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

■ Gyakorló feladatok

1. Korlátos-e alulról, illetve felülről az A halmaz, ha

(a) $A := \left\{\dfrac{|x|-2}{|x|+2} \in \mathbb{R} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$,

(b) $A := \left\{\dfrac{2x^2+1}{5x^2+2} \in \mathbb{R} \,:\, x \in \mathbb{R}\right\}$,

(c) $A := \left\{\dfrac{n^2+n+2}{3n+1} \in \mathbb{R} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(d) $A := \left\{\dfrac{2m-1}{3n+2} \in \mathbb{R} \,:\, m,n \in \mathbb{N},\ \ m \le n\right\}$,

(e) $A := \left\{\dfrac{2^{n+2}+9}{3\cdot 2^n+2} \in \mathbb{R} \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}$,

(f) $A := \left\{\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \in \mathbb{R}\right\}$?

Határozza meg $\sup A$-t és $\inf A$-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

2. Korlátos-e alulról, illetve felülről az

$$A := \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < 1,\ \ 0 < y < x\right\}$$

halmaz? Ha igen, akkor számítsa ki $\sup A$-t és $\inf A$-t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

3. **A $\sqrt{2}$ létezése.** Mutassa meg, hogy az $A := \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 2\right\}$ nemüres, felülről korlátos halmaz és a $\xi := \sup A$ jelöléssel $\xi^2 = 2$. A ξ számot a 2 valós szám *négyzetgyökének* nevezzük, és $\sqrt{2}$-vel jelöljük. Bizonyítsa be azt is, hogy $\sqrt{2}$ egy irracionális szám, és határozza meg az első három tizedesjegyét.

4. Bizonyítsa be, hogy a szuprémum-elvből következik a teljességi axiómában megfogalmazott állítás.

5. Igazolja, hogy az archimédészi és a Cantor-tulajdonság együtteséből levezethető a teljességi axiómában megfogalmazott állítás.

3. gyakorlat

Függvények

■ Szükséges definíciók és tételek

- Mit jelent az $f : A \to B$ szimbólum?
- Mit jelent az $f \in A \to B$ szimbólum?
- Hogyan értelmezzük halmaznak függvény által létesített *képét*?
- Definiálja halmaznak függvény által létesített *ősképét*?
- Mikor nevezünk egy függvényt *invertálhatónak*?
- Definiálja az inverz függvényt.
- Írja le az *összetett függvény* fogalmát.

■ Feladatok

• Halmaz függvény által létesített képe és ősképe

1. Legyen $f(x) := 3 + 2x - x^2$ $(x \in \mathbb{R})$. Határozza meg a $C := \{0\}$ halmaz f által létesített képét (vagyis az $f[C]$ halmazt) és ősképét (azaz $f^{-1}[C]$-t). Milyen $A \subset \mathbb{R}$ halmazokra lesz $f[A]$ egyelemű halmaz?

2. Írja fel intervallumokkal az $\operatorname{abs}^{-1}\big[(1,4)\big]$ halmazt.

• Függvények kompozíciója

3. Határozza meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha

(a) $f(x) := \sqrt{x+1}\ \ \big(x \in [-1,+\infty)\big), \qquad g(x) := x^2 - 3x + 1\ \ (x \in \mathbb{R});$

(b) $f(x) := \dfrac{1}{2x+1}\ \ \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\}\big), \qquad g(x) := x^2 + 3x + \tfrac{3}{2}\ \ (x \in \mathbb{R}).$

• Függvény inverze

4. Igazolja, hogy az

$$f(x) := \frac{1}{1+|x-1|} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény *nem* invertálható.

5. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \frac{x+1}{x-2} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\big)$$

függvény invertálható. Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ és $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve $f^{-1}(x)$ $\big(x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\big)$?

■ Házi feladatok

1. Határozza meg a $C := [0,1]$ halmaznak az

$$f(x) := 3x^2 - 2 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény által létesített képét és ősképét. Szemléltesse a függvényt és a szóban forgó halmazokat.

2. Határozza meg az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \sqrt{1-x} \ \ (x \in (-\infty, 1]) \qquad \text{és} \qquad g(u) := u^2 \ \ (u \in \mathbb{R}).$$

3. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \frac{3x+2}{x-1} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$$

függvény invertálható. Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ és $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve $f^{-1}(x)$ $\big(x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\big)$?

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen

$$f(x) := \sqrt{|5x-2|} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad D := (-1, 2].$$

Határozza meg az $f^{-1}[D]$ halmazt.

2. Határozza meg az $f \circ g$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \le 0) \\ x & (0 < x < +\infty), \end{cases} \qquad \text{és} \qquad g(x) := \begin{cases} 0 & (-\infty < x \le 0) \\ -x^2 & (0 < x < +\infty). \end{cases}$$

3. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} 3x+1 & (0 \le x \le 1) \\ \sqrt{18-x} & \text{ha } (1 < x < 2) \end{cases}$$

függvény invertálható, és határozza meg az inverzét.

4. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékénél lesz az

$$f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1, & \text{ha } -1 \le x < 0 \\ \alpha x^2, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

függvény invertálható? Mi lesz ekkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ és $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve $f^{-1}(x)$ $(x \in \mathcal{D}_{f^{-1}})$?

5. Legyen $f(x) := x^2 \quad (x > 0)$ és $g(x) := x + 1 \quad (x > 0)$. Mutassa meg, hogy az $f \circ g$ függvény invertálható, és határozza meg az inverzét.

6. Igazolja, hogy az $f : A \to B$ függvényre az

$$f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

7. Igazolja, hogy az $f : A \to B$ függvényre az

$$f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

8. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy minden $D \subset B$ halmazra $f[f^{-1}[D]] \subset D$. Igazolja azt is, hogy az $f[f^{-1}[D]] = D$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $D \subset B$ halmazra, ha $\mathcal{R}_f = B$.

4. gyakorlat

Sorozat konvergenciája

Szükséges ismeretek

- Mikor mondjuk azt, hogy egy valós sorozat felülről (alulról) korlátos?
- Mit jelent az, hogy egy valós sorozat korlátos?
- Mikor mondjuk azt, hogy egy valós sorozat monoton (szigorúan manoton) növekedő?
- Mikor nevezünk egy (x_n) valós sorozatot *konvergensnek*?
- Definiálja egy konvergens sorozat határértékét.
- Mi a részsorozat definíciója?
- Mit tud mondani konvergens sorozatok részsorozatairól?

Feladatok

• Sorozatok korlátossága és monotonitása

1. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorozatokat:

(a) $x_n := \dfrac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(b) $x_n := \dfrac{(-1)^n}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(c) $x_n := \sqrt{n} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(d) $x_n := \dfrac{8n+3}{5n+4} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(e) $x_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \quad (1 \leq n \in \mathbb{N})$.

• Határérték meghatározása a definíció alapján

2. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

(a) $\lim \left(\dfrac{1}{n^2-3}\right) = 0$,

(b) $\lim \left(\dfrac{n}{2n-3}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Adott $\varepsilon > 0$ számhoz tehát határozzon meg egy n_0 küszöbindexet.

3. Sejtse meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését.

(a) $\left(\dfrac{1+n^2}{2+n+2n^2}\right)$,

(b) $\left(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}\right)$.

Házi feladatok

1. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorozatokat:

(a) $x_n := n^2 + 1 \quad (n \in \mathbb{N})$,

(b) $x_n := \dfrac{2-7n}{3n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$.

2. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

$$\lim \left(\frac{3n+4}{2n-1} \right) = \frac{3}{2}.$$

Adott $\varepsilon > 0$ számhoz tehát határozzon meg egy n_0 küszöbindexet.

3. Sejtse meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését:

(a) $\left(\dfrac{3n^2-1}{2n^2+n+3} \right)$, (b) $\left(\sqrt{n^2+1} - n \right)$.

Gyakorló feladatok

1. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorozatokat:

(a) $x_n := \dfrac{3n-7}{2^{2n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$,

(b) $x_n := \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (1 \le n \in \mathbb{N})$.

(c) $x_n := \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n} \quad (1 \le n \in \mathbb{N})$.

2. Sejtse meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését:

(a) $\left(\dfrac{2n^3+10}{n^3+n^2+n+1} \right)$,

(b) $\left(\dfrac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1} \right)$,

(c) $\left(\sqrt{\dfrac{n^3+n^2-2n}{n^3+3}} \right)$.

5. gyakorlat

Konvergens sorozat határértékének kiszámítása

Szükséges ismeretek

- Mi a definíciója annak, hogy egy valós számsorozatnak van csúcsa?
- Fogalmazza meg a sorozatok konvergenciájára vonatkozó szükséges feltételt.
- Fogalmazza meg a sorozatokra vonatkozó közrefogási elvet.
- Milyen állításokat ismer a határérték és a rendezés között?
- Mit tud mondani korlátos sorozat és nullasorozat szorzatáról?
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok szorzatáról?
- Milyen állítást ismer konvergens sorozatok hányadosáról?

Feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $\left(\dfrac{n^3-3n^2+n-1}{1-2n^3+n}\right)$,

(b) $\left(\dfrac{(2-n)^7+(2+n)^7}{(n^2+n+1)\cdot(2n+1)^5}\right)$.

2. Igazolja, hogy ha $\alpha := \lim(x_n) \implies |\alpha| = \lim\big(|x_n|\big)$.

3. Tegyük fel, hogy $x_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N})$ és $\alpha := \lim(x_n)$. Igazolja, hogy

(a) $\alpha \geq 0$,

(b) a $\left(\sqrt{x_n}\right)$ sorozat is konvergens, és $\lim\left(\sqrt{x_n}\right) = \sqrt{\alpha}$.

4. Számítsa ki az alábbi határértéket:

$$\lim\Big(\sqrt{n^2+2n+3}-\sqrt{n^2-n+1}\Big).$$

5. A nevezetes $\left(q^n\right)$, $\left(n^k\cdot q^n\right)$, $\left(\dfrac{a^n}{n!}\right)$ sorozatok határértékéről tanultakat is felhasználva, számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\lim\left(\dfrac{5^{n+1}+2^n}{3\cdot 5^n-5^{-n}}\right)$; (b) $\lim\left(\dfrac{n^2\cdot 3^n+2^{2n}}{4^{n+1}+2^n}\right)$;

(c) $\lim\left(\sqrt{\dfrac{(-5)^n+7^n}{7^{n+1}+n^7}}\right)$; (d) $\lim\left(\dfrac{(-2)^n+n}{n!+3^n}\right)$.

Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $\left(\dfrac{n^3-2n-1}{-3n^3+n+3}\right)$, (b) $\left(\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3+1}\right)$.

2. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, akkor mi a határértékük?

(a) $\left(\sqrt{n^2+3n+1}-2n\right)$; (b) $\left(n\left(n-\sqrt{n^2+1}\,\right)\right)$.

3. Számítsa ki az alábbi határértékeket:

(a) $\left(\sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{n^2+2}}\right)$, (b) $\left(\dfrac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1}\right)$,

(c) $\lim\left(\dfrac{2^n+2^{-n}}{2^{-n}+3^n}\right)$, (d) $\lim\left(\dfrac{n\cdot 2^{n+1}+3^{2n}}{9^{n-1}+3^n}\right)$,

(e) $\lim\left(\sqrt{\dfrac{(-2)^n+5^n}{5^{n+1}+n^5}}\right)$, (f) $\lim\left(\dfrac{(-3)^n+n^3}{n!+5^n}\right)$.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét.

(a) $\left(\dfrac{2^n+2^{-n}}{2^{-n}+3^n}\right)$;

(b) $\left(\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$;

(c) $\left(\dfrac{n+\sqrt{n^4+3}}{2n^2+5}\right)$.

2. Határozza meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(an-\sqrt{cn^2+bn-2}\right)=1$$

legyen.

6. gyakorlat

Sorozat (tágabb értelemben vett) határértéke

Szükséges ismeretek

- Mit jelent az, hogy az (x_n) sorozat $(+\infty)$-hez tart?
- Mi a definíciója annak, hogy az (x_n) sorozatnak $-\infty$ a határértéke?
- Mikor mondja azt, hogy az (x_n) sorozatnak *van határértéke*?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok összegéről?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok szorzatáról?
- Milyen állítást tud mondani (tágabb értelemben) határértékkel bíró sorozatok hányadosáról?

Feladatok

1. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy $\lim\,(n^2+3)=+\infty$.

2. Sejtse meg az alábbi sorozatok határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését:

(a) $\left(\dfrac{n^2+3n+1}{n+3}\right)$, (b) $\left(\dfrac{2-3n^2}{n+1}\right)$.

3. Mutassa meg, hogy ha (x_n) pozitív tagú nullasorozat, akkor $\lim\left(\dfrac{1}{x_n}\right)=+\infty$.

4. Legyen

$$P(x) := a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$(x\in\mathbb{R},\quad a_i\in\mathbb{R}, i=0,1,2,\ldots,r)$$

egy pontosan r-edfokú polinom (azaz $a_r\neq 0$). Mutassa meg, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } a_r>0 \\ -\infty, & \text{ha } a_r<0. \end{cases}$$

5. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $\left(\dfrac{n^7+n-12}{1-n^2+3n}\right)$, (b) $\left(\dfrac{n^4+n^2+n+1}{2n^5+n-4}\right)$,

(c) $\left(n^2\big(n-\sqrt{n^2+1}\,\big)\right)$.

6. Az $a\in\mathbb{R}$ paramétertől függően határozza meg a következő határértékeket:

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n+1}-a\cdot n\right).$$

Házi feladatok

1. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy $\lim (2 - n^3) = -\infty$.

2. Sejtse meg az alábbi sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését:

$$\left(\frac{n^4 + 2n^2 + 1}{n^2 + 1}\right).$$

3. Mutassa meg, hogy ha (x_n) negatív tagú nullasorozat, akkor $\lim \left(\dfrac{1}{x_n}\right) = -\infty$.

Gyakorló feladatok

1. Tegyük fel, hogy adottak az $r, s \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, $a_r \neq 0$, $b_0, \ldots, b_s \in \mathbb{R}$, $b_s \neq 0$ számok, és legyen

$$R_n := \frac{a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_r n^r}{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \cdots + b_s n^s}$$

olyan $n \in \mathbb{N}$ indexekre, amelyekre a nevező nem nulla.

Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} R_n = \begin{cases} \dfrac{a_r}{b_s}, & \text{ha } r = s \\ 0, & \text{ha } r < s \\ +\infty, & \text{ha } r > s \text{ és } a_r/b_s > 0 \\ -\infty, & \text{ha } r > s \text{ és } a_r/b_s < 0. \end{cases}$$

7. gyakorlat

Sorozatok határértékének kiszámolása

Szükséges ismeretek

- Milyen állítást ismer monoton sorozatok határértékéről?
- Hogyan szól a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel?
- Mikor nevez egy sorozatot Cauchy-sorozatnak?
- Mi a kapcsolat a konvergens sorozatok és a Cauchy-sorozatok között?
- Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?
- Milyen állítást ismer az $\left(n^k \cdot q^n\right)$ sorozat konvergenciájával kapcsolatosan, ahol k és q valós paraméterek?
- Milyen állítást ismer az $(a^n/n!)$ sorozat konvergenciájával kapcsolatosan, ahol a valós paraméter?
- Mi az e szám definíciója?
- Milyen konvergenciatételt tanult az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ $(a > 0)$ sorozatról?
- Milyen állítást ismer az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozat konvergenciájáról?
- Mi a határértéke az $\left(\sqrt[n]{n!}\right)$ sorozatnak?

Feladatok

2. Tegyük fel, hogy a *nemnegatív tagú* (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) > 0$. Mutassa meg, hogy ekkor

$$\lim(\sqrt[n]{a_n}) = 1.$$

3. Konvergensek-e a következő sorozatok, ha igen, mi a határértékük:

(a) $\left(\sqrt[n]{3n^5 + 2n + 1}\right)$, (b) $\left(\sqrt[n]{\dfrac{n+1}{2n+3}}\right)$, (c) $\left(\sqrt[n]{\dfrac{3^n}{n!} + 2^n}\right)$

4. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$, (b) $\left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n}\right)$, (c) $\left(\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{n}\right)$.

5. Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to (0, +\infty)$ olyan sorozat, amelyre $\lim(x_n) = +\infty$ teljesül. Bizonyítsa be, hogy ekkor

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e.$$

6. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}\right)$, (b) $\left(\left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n}\right)$, (c) $\left(\left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^{2n+3}\right)$.

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\sqrt[n]{n^2+100}\right)$, (b) $\left(\sqrt[n]{2\cdot 5^n+7^n}\right)$,

(c) $\left(\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5}\right)$; (d) $\left(\left(\dfrac{2n+3}{3n+1}\right)^{n-5}\right)$.

■ Gyakorló feladatok

1. Számítsa ki a következő sorozat határértékét:

$$\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\frac{n}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right).$$

2. Tegyük fel, hogy az $(a_n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}_0^+$ sorozat

(a) nullasorozat (b) nem konvergens.

Vizsgálja meg határérték szempontjából az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozatot.

3. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\sqrt[n]{\sqrt{n}+2}\right)$,

(b) $\left(\sqrt[n]{a^n+b^n}\right)$ $(0\le a,b\in\mathbb{R})$,

(c) $\left(\left(\dfrac{n^3-3}{n^3+2}\right)^{n^3}\right)$,

(d) $\left(\left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n^2}\right)$.

$\boxed{\text{8. gyakorlat}}$

Rekurzív sorozat határértéke

■ Szükséges definíciók és tételek

- Milyen állítást ismer monoton sorozatok határértékéről?
- Hogyan szól a Bolzano-Weierstrass-féle kiválasztási tétel?
- Mit állít a Cauchy-féle konvergenciakritérium?
- Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mit tud mondani a (q^n) sorozatról határérték szempontjából?
- Milyen állítást ismer az $(a^n/n!)$ sorozat konvergenciájával kapcsolatosan, ahol a valós paraméter?
- Milyen állítást ismer monotonitás és korlátosság szempontjából az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

  sorozatról?
- Milyen állítást ismer az $\left(\sqrt[n]{n!}\right)$ sorozat határértékével kapcsolatosan?
- Fogalmazza meg pozitív valós szám m-edik gyökének a létezésére vonatkozó tételt.

■ Feladatok

1. Legyen

$$a_n := \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots}}}, \quad 1 \le n \in \mathbb{N}, \quad \text{és itt } n \text{ darab gyökvonás szerepel.}$$

Adjon meg rekurzív összefüggést az (a_n) sorozat tagjai között, és ennek alapján számítsa ki $\lim(a_n)$-et.

2. Legyen

$$a_n := \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2\cdots}}}, \quad 1 \le n \in \mathbb{N}, \quad \text{és itt } n \text{ darab gyökvonás szerepel.}$$

Adjon meg rekurzív összefüggést az (a_n) sorozat tagjai között, és ennek alapján számítsa ki $\lim(a_n)$-et.

3. Az $\alpha > 0$ valós paraméter mely értékeire konvergens az

$$a_0 := \sqrt{\alpha}, \quad a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, és ekkor mi a határértéke?

4. Milyen $\alpha \ge 0$ valós paraméter esetén konvergens az

$$a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \alpha + a_n^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat? Ha konvergens, akkor mi a határértéke?

■ Házi feladatok

1. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $a_0 := \sqrt{3}$, $a_{n+1} := \sqrt{3+2a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(b) $a_0 := 0, \quad a_{n+1} := \dfrac{a_n^3+1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$.

2. Bizonyítsa be, hogy ha $\alpha \in [0,1]$, akkor az

$$a_0 := \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2+\alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét.

■ Gyakorló feladatok

1. Legyen

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2+a_n} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Igazolja, hogy

$$a_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

2. Számítsa ki az

$$a_0 := 6, \quad a_{n+1} := 5 - \frac{6}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét.

3. Konvergens-e az

$$0 \le a_0 \le 1, \quad a_{n+1} := 1 - \sqrt{1-a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

4. A nemnegatív $\alpha < \beta$ valós számokból kiindulva a következőképpen képezzük az (a_n) és a (b_n) sorozatot:

$$a_0 := \alpha, \quad b_0 := \beta \text{ és } a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Igazolja, hogy a sorozatok konvergensek, és a határértékük egyenlő. Lényeges-e az $\alpha < \beta$ feltétel? (C. F. Gauss nyomán ezt a közös értéket az α és a β számok **számtani-mértani közepének** nevezzük.)

$\boxed{\text{9. és 10. gyakorlat}}$

Végtelen sorok

■ Szükséges definíciók és tételek

- Mit jelent az, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor *konvergens*, és hogyan értelmezzük az *összegét*?
- Milyen tételt ismer $q \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor konvergenciájáról?
- Mi a *teleszkópikus sor* és mi az összege?
- Milyen állítást ismer a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor konvergenciájával kapcsolatban?
- Mondjon *szükséges* feltételt arra nézve, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor konvergens legyen.
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *összehasonlító kritériumokat.*
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *Cauchy-féle gyökkritériumot.*
- Fogalmazza meg a végtelen sorokra vonatkozó *D'Alembert-féle hányados-kritériumot.*
- Mik a Leibniz-típusú sorok és milyen konvergenciatételt ismer ezekkel kapcsolatban?

■ Feladatok

1. Igazolja, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és határozza meg az összegüket:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{2^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=10} \frac{\big((-1)^n + 2^n\big)^2}{5^{n+2}}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{4n^2-1}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}}$.

2. Legyen $q \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$ és határozza meg a következő sorösszeget:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n.$$

3. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \sqrt[n]{0,1}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n}{2n-1}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+2}$.

4. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{2n-1}$; (b) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{1+n^2}$;

(c) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; (d) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$.

5. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?

(a) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n!}$; (b) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(c) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{n^2}{2^n+3^n}$;

(e) $\sum\limits_{n=0} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}$; (f) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{2n+1}{(-3)^n}$.

6. Milyen $x \geq 0$ valós szám esetén konvergens a

$$\sum_{n=0} \left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

sor, és akkor mi az összege?

7. Az x valós szám milyen értéke mellett konvergens a

$$\sum_{n=1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$$

végtelen sor?

8. Az $x \in \mathbb{R}$ szám milyen értéke mellett konvergens a

$$\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$$

végtelen sor?

■ Házi feladatok

1. Igazolja, hogy az alábbi végtelen sorok konvergensek, és határozza meg az összegüket:

(a) $\sum\limits_{n=10} \left(\dfrac{5}{2^n}+\dfrac{1}{3^{2n}}\right)$; (b) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^2+4n+3}$.

2. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{n^2-1}{3n^2+1}$; (b) $\sum\limits_{n=1} \left(\dfrac{n+3}{n+1}\right)^{n-1}$.

3. Konvergensek-e a következő sorok:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2+n+1}{\sqrt{n^4+1}+n^5}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$?

4. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{100^n}{n!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{3^n\cdot(n+2)!}{(n+1)^n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2+(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

■ Gyakorló feladatok

1. Konvergens-e a $\sum a_n$ sor, ha a

$$\lim_{n\to+\infty}\big(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots a_{n+p}\big)=0$$

egyenlőség minden $p=1,2,\ldots$ számra teljesül?

2. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában nem fordul elő a 7 számjegy. Igazolja, hogy ezen számok reciprokainak az összege véges. Mutassa meg, hogy az összeg kisebb 80-nál.

3. **A Cauchy-féle kondenzációs elv:** Ha $0\le a_{n+1}\le a_n$ $(n\in\mathbb{N})$, akkor a $\sum a_n$ és a $\sum\big(2^n a_{2^n}\big)$ sorok egyszerre konvergensek, illetve divergensek (röviden: a két sor *ekvikonvergens*).

4. A Cauchy-féle kondenzációs elv felhasználásával mutassa meg, hogy $\alpha\in\mathbb{R}$ esetén a

$$\sum_{n=1}\frac{1}{n^\alpha}\quad \textbf{hiperharmonikus sor}\quad \begin{cases}\text{konvergens,} & \text{ha } \alpha>1\\ \text{divergens,} & \text{ha } \alpha\le 1.\end{cases}$$

5. A $\displaystyle\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ feltételesen konvergens sornak adjon meg egy olyan átrendezését, amelynek összege

(a) 12, (b) $+\infty$.

6. Mtassa meg, hogy a

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{n+1}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzata konvergens,

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor önmagával vett Cauchy-szorzata divergens.

11. gyakorlat

Hatványsorok

■ Szükséges ismeretek

- Írja le a *hatványsor* definícióját.
- Fogalmazza meg a *Cauchy–Hadamard-tételt.*
- Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $(-1,1]$ intervallum.
- Adjon meg egy olyan *hatványsort*, amelyiknek a konvergenciahalmaza a $[-1,1]$ intervallum.
- Definiálja a sin függvényt.
- Definiálja a cos függvényt.

■ Feladatok

1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n \quad (x\in\mathbb{R});$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}\frac{2^{n-1}}{2n-1}(3x-1)^n \quad (x\in\mathbb{R});$

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(x+2)^n \quad (x\in\mathbb{R}).$

2. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő 0-körüli hatványsor összegeként:

(a) $f(x)=\dfrac{1-x}{1-x^2} \quad (x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}),$

(b) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2} \quad (x\in\mathbb{R}),$

(c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6} \quad \big(x\in\mathbb{R}\setminus\big\{2,3\big\}\big),$

■ Gyakorló feladatok

1. Határozza meg az alábbi hatványsorok konvergenciasugarát és konvergenciahalmazát:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}\frac{3^n+(-2)^n}{n+1}x^n \quad (x\in\mathbb{R});$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}\frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}(-x)^n \quad (x\in\mathbb{R});$

2. Az alábbi f függvényeket (vagy egy alkalmas leszűkítésüket) állítsa elő 0-körüli hatványsor összegeként:

(a) $f(x) = \dfrac{1+x}{3x-2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{2}{3}\}\big)$,

(b) $f(x) = \dfrac{x+3}{5x^2+9x-2} \quad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{1}{5}\}\big)$,

(c) $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{1\})$,

(d) $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$,

(e) $f(x) = \sin^2 x \quad (x \in \mathbb{R})$.

12. gyakorlat

1. Bizonyítsa be, hogy a $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}$ sor konvergens és e az összege, azaz

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

(Emlékeztetőül: az e számot az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(0 < n \in \mathbb{N})$ sorozat határértékeként értelmeztük.)

Mutassa meg, hogy

(a) minden $0 < n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!};$$

(b) az e szám irracionális és $2,7180 < e < 2,7183$.

2. Bizonyítsa be, hogy minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

(a) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$;

(b) $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;

(c) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$;

(d) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;

(e) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.