A 2. zh témakörei
Analízis 2.

1. feladat. *Bizonyítsa be, hogy az* $f(x) := x + \ln x$ $(x \in (0, +\infty))$ *függvény invertálható és számítsa ki* $\big(f^{-1}\big)'(1+e)$*-t.*

Megoldás. Az f függvény deriválható a $(0, +\infty)$ intervallumon.

Mivel

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \qquad (x > 0),$$

ezért f szigorúan monoton növekedő a $(0, +\infty)$ intervallumon, következésképpen invertálható.

Az inverz függvény deriválási szabálya alapján f^{-1} minden $y\ (= f(x)) \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\ (= \mathcal{R}_f)$ pontban deriválható és

$$(*) \qquad \big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (y \in \mathcal{D}_{f^{-1}},\quad y = f(x)).$$

Az $y = f(x) = x + \ln x$ egyenletből x nem fejezhető ki explicit módon, ezért $x = f^{-1}(y)$-ra explicit képlet nem adható meg. A feladat azonban csak az $y = 1 + e$ pontban kérdezi $\big(f^{-1}\big)'$-t. Nem nehéz *észrevenni*, hogy az

$$1 + e = x + \ln x$$

egyenletnek $x = e$ egy megoldása, és f szigorú monotonitása miatt ez az egyetlen megoldás.

Mivel $f(e) = e + \ln e = e + 1$, ezért $1 + e \in \mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}}$ valóban teljesül.

A $(*)$ képletbe az $y = 1 + e$ és $x = e$ értékeket beírva azt kapjuk, hogy

$$\big(f^{-1}\big)'(1+e) = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{e}} = \frac{e}{1+e}. \quad \blacksquare$$

2. feladat. *Döntse el, hogy léteznek-e az alábbi határértékek. Ha igen, akkor számítsa is ki azokat.*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$, $\qquad$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3}$.

Megoldás. (a) Mivel $\frac{1}{x} > 0$, ha $x > 0$, ezért

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = \left(e^{\ln\frac{1}{x}}\right)^{\sin x} = e^{(-\ln x)\cdot\sin x} \qquad (x > 0).$$

Először a kitevő határértékét vizsgáljuk:

$$\lim_{x\to 0+0} (-\ln x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+0} \sin x = \sin 0 = 0,$$

ezért $0 \cdot (+\infty)$ típusú kritikus határértékről van szó; a L'Hospital szabály most alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0+0} (-\ln x)\cdot \sin x = \lim_{x\to 0+0} \frac{-\ln x}{\frac{1}{\sin x}} =$$

$\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right.$ típusú kritikus határérték, a L'Hospital szabály most is alkalmazható$\left.\right)$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{-\dfrac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot \cos x} = \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{\cos x}.$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ és $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{x}{\cos x} = 0$, ezért

$$\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{x}{\cos x} = 0.$$

A kitevő határérték tehát

$$\lim_{x\to 0+0} (-\ln x)\cdot \sin x = 0.$$

Mivel az *exponenciális függvény folytonos a* 0 *pontban* és $e^0 = 1$, ezért

$$\lim_{x\to 0+0} e^{(-\ln x)\cdot \sin x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0}(-\ln x)\cdot \sin x} = e^0 = 1 = \lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}.$$

(b) $\frac{-16}{0}$ típusú határértékről van szó. A nevező pozitív és negatív is lehet (v.ö. $\frac{1}{x}$-szel a 0-ban!); ezért a L'Hospital szabály *most nem alkalmazható.*

Először átalakítjuk a kifejezést:

$$\frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3} = \frac{(x+7)(x-1)}{(x+3)(x-1)} = \frac{x+7}{x+3}.$$

Mivel

$$\lim_{x\to -3+0} \frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3+0} \frac{x+7}{x+3} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to -3-0} \frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3} = \lim_{x\to -3-0} \frac{x+7}{x+3} = -\infty,$$

ezért a szóban forgó határérték nem létezik. ■

3. feladat. *Teljes függvényvizsgálat végzése után vázolja az*

$$f(x) := \operatorname{arc\,tg}(4x) - 2x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény grafikonját.

Megoldás. Az f függvény akárhányszor deriválható, és minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$f'(x) = \frac{4}{1+16x^2} - 2 = 2\frac{1-16x^2}{1+16x^2} \quad \text{és} \quad f''(x) = \left(\frac{4}{1+16x^2} - 2\right)' = -\frac{128x}{(1+16x^2)^2}.$$

Monotonitási intervallumok:

$$f'(x) \gtreqqless 0 \iff \frac{1-16x^2}{1+16x^2} \gtreqqless 0 \iff 1-16x^2 \gtreqqless 0 \iff \frac{1}{4} \gtreqqless |x|.$$

$f'(x) < 0$, ha $x < -\frac{1}{4}$, ezért $f \downarrow \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$-en,
$f'(x) > 0$, ha $|x| < \frac{1}{4}$, ezért $f \uparrow \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$-en,

$f'(x) < 0$, ha $x > \frac{1}{4}$, ezért $f \downarrow$ $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$-en.

Lokális szélsőértékek:

$$f'(x) = 0 \iff 1 - 16x^2 = 0 \iff x_1 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{1}{4}.$$

A monotonitást figyelembe véve kapjuk, hogy $x_1 = -\frac{1}{4}$ *lokális minimumhely* és $x_2 = \frac{1}{4}$ *lokális maximumhely.*

Konvexitási intervallumok:

$$f''(x) \gtreqless 0 \iff -\frac{x}{(1+16x^2)^2} \gtreqless 0 \iff 0 \gtreqless x.$$

$f''(x) > 0$, ha $x < 0$, ezért f szigorúan konvex a $(-\infty, 0)$intervallumon;
$f''(x) < 0$, ha $x > 0$, ezért f szigorúan konkáv a $(0, \infty)$intervallumon;
$x = 0$ inflexiós pont.

A határértékeket $(\pm\infty)$-ben kell megvizsgálni. Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(4x) = -\tfrac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg}(4x) = \tfrac{\pi}{2},$$

ezért

$$\lim_{x\to-\infty} \big(\operatorname{arc\,tg}(4x) - 2x\big) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \big(\operatorname{arc\,tg}(4x) - 2x\big) = -\infty.$$

Aszimptoták. Mivel

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg}(4x)}{x} - 2\right) = -2 = A,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - A\cdot x\big) = \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) + 2x\big) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg}(4x) = -\frac{\pi}{2} = B,$$

ezért az $y = Ax + B = -2x - \frac{\pi}{2}$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája $(-\infty)$-ben.

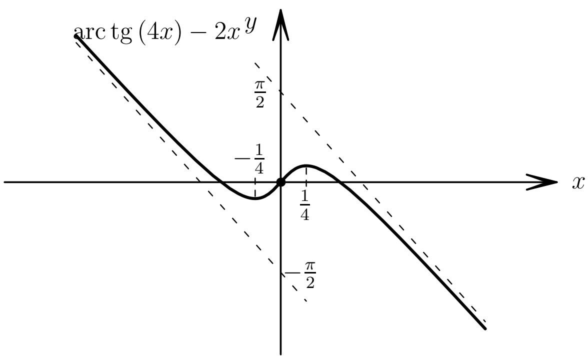
Hasonlóan

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg}(4x)}{x} - 2x\right) = -2 = A,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - A\cdot x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(f(x) + 2x\big) = \lim_{x\to+\infty} \big(\operatorname{arc\,tg}(4x)\big) = \frac{\pi}{2} = B,$$

ezért az $y = Ax + B = -2x + \frac{\pi}{2}$ egyenletű egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$-ben.

Az eddigieket összefoglalva az f függvény képe:



4. feladat. *Írja fel az* $f(x) := (x+1)^2 \ln(x+1)$ $(x > -1)$ *függvények a* 0 *pont körüli harmadfokú Taylor-polinomját, és határozza meg, hogy a* $[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$ *intervallumon mekkora hibával közelíti meg a Taylor-polinom a függvényt.*

Megoldás. Az f függvény akárhányszor deriválható, és minden $x \in \mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$ pontban

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 2(x+1)\ln(x+1) + (x+1)^2 \cdot \frac{1}{x+1} = (x+1)\big(2\ln(x+1)+1\big),\\
f''(x) &= \big(2\ln(x+1)+1\big) + (x+1)\cdot\frac{2}{x+1} = 2\ln(x+1)+3,\\
f'''(x) &= \frac{2}{x+1},\\
f^4(x) &= -\frac{2}{(x+1)^2};
\end{aligned}
$$

ezért

$$f(0) = 0, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = 3, \qquad f'''(0) = 2.$$

Az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja:

$$\big(T_{3,0}f\big)(x) = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \tfrac{f'''(0)}{3!}x^3 = x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal: minden $x \in \big[-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\big]$ ponthoz létezik olyan 0 és x közötti ξ (tehát $|\xi| \le |x| \le \frac{1}{10}$), hogy

$$\big|f(x) - \big(T_{3,0}f\big)(x)\big| = \left|\frac{f^4(\xi)}{4!}x^4\right| = \frac{\frac{2}{(1+\xi)^2}}{4!}|x|^4 \le \frac{10^{-4}}{12}\cdot\frac{1}{(\xi+1)^2} \le \frac{10^{-4}}{12}\cdot\frac{1}{\big(\frac{9}{10}\big)^2} = \frac{10^{-2}}{12\cdot 81}.$$

Ezért

$$\Big|(x+1)^2\ln(x+1) - \big(x + \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\big)\Big| \le \frac{10^{-2}}{12\cdot 81},$$

ha $-\frac{1}{10} \le x \le \frac{1}{10}$. ■

5. feladat. *Számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:*

(a) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\,dx.$ (alkalmazza az $x = \sqrt{e^x - 1}$ helyettesítést).

Megoldás. L. a gyakorlatot. ■