

Analízis1–ABC, 1. zárthelyi dolgozat, gyakorló feladatsor

1. Adott az $A := \left\{ \frac{x^2 + 1}{x^2} \in \mathbb{R} \mid x \in [1; 2) \right\}$ halmaz. Határozza meg $\sup A$, $\inf A$, $\min A$, $\max A$ -t ha léteznek és állításait bizonyítsa is be.

2. Adott az $f(x) := \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$ ($x \in [1; +\infty)$) függvény. Igazolja, hogy f invertálható és adja meg a $D_{f^{-1}}$; $R_{f^{-1}}$ halmazokat és $x \in D_{f^{-1}}$ esetén $f^{-1}(x)$ -et.

3. Határozza meg az $\frac{f}{g}$ hányados függvényt, az $\frac{f}{g} \circ h$ összetett függvényt és az $\left(\frac{f}{g} \circ h\right)^{-1}$ inverz függvényt (ha léteznek):

$$f(x) := \sqrt{1 - x} \quad (x \in (-\infty; 1]) \quad \wedge \quad g(x) := \sqrt{x} - 1 \quad (x \in [0; +\infty)) \quad \wedge \quad h(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4. Határozza meg a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - n + 1}{5n^2 + 2n + 1}$ határértéket és állítását igazolja a *definíció* segítségével.

5. Számítsa ki a következő határértékeket:

$$a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n + 2^n)^2 + 2^{2n-1}}{\sqrt{3} \cdot 16^n + n^2}; \quad b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4n + \sqrt{n}} - a \cdot \sqrt{n} \right) \quad (a \in \mathbb{R}).$$