

Az 1. zh témakörei

1. feladat. Legyen

$$A := \left\{ \frac{x^2 - 2}{3x^2 + 2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Határozza meg $\sup A$ -t és $\inf A$ -t. Van-e az A halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

Megoldás. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ számra

$$\frac{x^2 - 2}{3x^2 + 2} = \frac{\frac{1}{3}(3x^2 + 2) - \frac{2}{3} - 2}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2 + 2},$$

ezért

$$(*) \quad -1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 0 + 2} \leq \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2 + 2} < \frac{1}{3}.$$

A halmaz tehát **korlátos**: -1 egy alsó és $\frac{1}{3}$ egy felső korlát.

A halmaznak **van legkisebb eleme**, ez az $x = 0$ értékhez tartozó -1 szám, tehát

$$\min A = \inf A = -1.$$

(*)-ból **sejthető**, hogy

$$\sup A = \frac{1}{3}.$$

Bizonyítás:

(i) $\frac{1}{3}$ egy felső korlát, l. (*)-ot.

(ii) Megmutatjuk, hogy $\frac{1}{3}$ a legkisebb felső korlát, azaz

$$(**) \quad \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2 + 2} > \frac{1}{3} - \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\frac{1}{3} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2 + 2} > \frac{1}{3} - \varepsilon \iff \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{3x^2 + 2} < \varepsilon \iff x^2 > \frac{1}{3} \left(\frac{8}{3\varepsilon} - 2 \right),$$

ezért (**) például az $x := \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8}{\varepsilon}}$ választással teljesül, tehát $\sup A = \frac{1}{3}$.

Mivel $\sup A \notin A$, ezért a halmaznak **nincs legnagyobb eleme**. ■

2. feladat. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x) := \frac{2x - 1}{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$$

függvény invertálható. Határozza meg a $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ és az $\mathcal{R}_{f^{-1}}$ halmazokat, illetve $x \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ esetén $f^{-1}(x)$ -et.

Megoldás. Célszerű először elvégezni a következő átalakítást:

$$(\#) \quad f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1} = \frac{2(x + 1) - 3}{x + 1} = 2 - \frac{3}{x + 1} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}).$$

Az invertálhatóság igazolása: Legyen $x, t \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f(x) = f(t) \implies 2 - \frac{3}{x + 1} = 2 - \frac{3}{t + 1} \implies x = t,$$

és ez azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz előállítás: (#) alapján *sejthető*, hogy

$$\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Ennek igazolása:

(i) $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R} \setminus \{2\}$ nyilvánvaló, mert (#) alapján $\forall x \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(ii) Fordítva:

$$\mathbb{R} \setminus \{2\} \subset \mathcal{R}_f \iff \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}\text{-höz } \exists x \in \mathcal{D}_f : f(x) = y.$$

Ez azonban igaz, mert

$$f(x) = y \iff 2 - \frac{3}{x+1} = y \iff x = -1 + \frac{3}{2-y} = \frac{1+y}{2-y},$$

és $x \neq -1$ miatt $x \in \mathcal{D}_f$; ezért $\mathbb{R} \setminus \{2\} \subset \mathcal{R}_f$.

(i) és (ii)-ből következik, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

A fentiek alapján f inverze az

$$f^{-1}(y) = \frac{1+y}{2-y} \quad (y \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$$

függvény. ■

3. feladat. Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \quad \text{és} \quad g(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megoldás. $f \circ g$:

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{x \in \mathcal{D}_g : g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\} = [-1, 1],$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{1-x^2} \quad (x \in [-1, 1]).$$

$g \circ f$:

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f : f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in (-\infty, 1] : \sqrt{1-x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 1],$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{1-x})^2 = 1-x \quad (x \in (-\infty, 1]). \quad \blacksquare$$

4. feladat. *Sejtsse meg az*

$$a_n := \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat határértékét, majd a definíció alapján bizonyítsa be a sejtését.

Megoldás. Az

$$a_n := \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{n^3}} - \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n^2}}$$

átalakítás alapján a

sejtés: $\lim(a_n) = \frac{1}{2}$.

Bizonyítás: Azt kell megmutatni, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, n \in \mathbb{N}\text{-re : } \left| \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor

$$\left| \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-4\sqrt{n} - 6n - 1}{2(2n^2 + 1)} \right| = \frac{6n + 4\sqrt{n} + 1}{2(2n^2 + 1)} \leq \frac{6n + 4n + n}{4n^2} \leq \frac{12n}{4n^2} = \frac{3}{n} < \varepsilon.$$

Az utolsó egyenlőtlenség teljesül, ha $n > \frac{3}{\varepsilon}$, ezért az

$$\left| \frac{n^2 - 2\sqrt{n} - 3n}{2n^2 + 1} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség fennáll, ha $n \geq n_0 := \left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil + 1$. (Az $\varepsilon > 0$ számhoz tehát $\left\lceil \frac{3}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ egy „jó” küszöbindex). ■

5. feladat. Számítsa ki a következő sorozatok határértékét:

$$(a) a_n := \frac{\sqrt{n^4 - n + 1}}{n^2 - \sqrt{n + 2}} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(b) b_n := n + 3 - \sqrt{n^2 - 2} \quad (n = 2, 3, \dots);$$

$$(c) c_n := \frac{2^{1-n} + (-3)^{n+2} + 4^n}{2^{2n+1} + n^3 3^{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Megoldás. (a) A számlálót és a nevezőt leosztjuk n^2 -tel:

$$a_n := \frac{\sqrt{n^4 - n + 1}}{n^2 - \sqrt{n + 2}} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4}}}{1 - \sqrt{\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^4}}}.$$

Mivel

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k = 3, 4) \quad \text{és} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{A}, \quad \text{ha} \quad \lim(x_n) = A,$$

ezért a számlálóban levő sorozat 1-hez, a nevezőben levő sorozat 1-hez tart. A hányadosuk határértéke tehát 1, azaz

$$\lim(a_n) = 1.$$

(b) Most gyöktelenítéssel alakítjuk át a sorozat tagjait megadó kifejezést:

$$\begin{aligned} b_n &= n + 3 - \sqrt{n^2 - 2} = (n + 3 - \sqrt{n^2 - 2}) \cdot \frac{n + 3 + \sqrt{n^2 - 2}}{n + 3 + \sqrt{n^2 - 2}} = \\ &= \frac{(n + 3)^2 - (n^2 - 2)}{n + 3 + \sqrt{n^2 - 2}} = \frac{6n + 11}{n + 3 + \sqrt{n^2 - 2}} = \frac{6 + \frac{11}{n}}{1 + \frac{3}{n} + \sqrt{1 - \frac{2}{n^2}}}. \end{aligned}$$

Mivel $\lim(1/n) = 0$ és $\lim(\sqrt{1 - \frac{2}{n^2}}) = 1$, ezért a konvergens sorozatok összegére és szorzatára vonatkozó tételeink alapján a számlálóban levő sorozat 6-hoz, a nevezőben levő sorozat pedig 2-höz tart. A hányadosuk határértéke 3, ezért

$$\lim(b_n) = 3.$$

(c) A következő átalakításokat végezzük el:

$$c_n = \frac{2^{1-n} + (-3)^{n+2} + 4^n}{2^{2n+1} + n^3 3^{n-1}} = \frac{\frac{2}{2^n} + (-3)^2(-3)^n + 4^n}{2 \cdot 4^n + \frac{1}{3} n^3 3^n} = \frac{2 \left(\frac{1}{8}\right)^n + 9 \left(-\frac{3}{4}\right)^n + 1}{2 + \frac{1}{3} n^3 \left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Mivel $\lim(q^n) = 0$ és $\lim(n^3 q^n) = 0$, ha $|q| < 1$, ezért a számlálóban levő sorozat 1-hez, a nevezőben levő pedig 2-höz tart, ezért a hányadosuk határértéke $1/2$, azaz

$$\lim(c_n) = \frac{1}{2}. \quad \blacksquare$$